$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\quad A = U\Sigma V^t$ $\quad U \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ ortogonal

$V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonal

$\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ diagonal

Uso para PMCL

Buscamos x que minimice $\|Ax-b\|_2$

$$\|Ax-b\| = \|U\Sigma V^t x - b\| \overset{*}{=} \|\underbrace{U^tU}_{Id}\Sigma V^t x - U^t b\| = \|\Sigma \overbrace{V^t x}^{\substack{CV \\ w}} - \overbrace{U^t b}^{b'}\| = \|\underset{\text{diagonal}}{\Sigma} w - b'\|$$

$*$ multiplico por U^t que como U es ortogonal, $U^{-1} = U^t$ y también es ortogonal.

Las matrices ortogonales no cambian norma al multiplicar

$$\Sigma w - b' = \begin{pmatrix} \sigma_1 w_1 - b'_1 \\ \sigma_2 w_2 - b'_2 \\ \vdots \\ \sigma_r w_r - b'_r \\ -b'_{r+1} \\ \vdots \\ -b'_m \end{pmatrix}$$

$= 0$

$w_1 = \frac{b'_1}{\sigma_1} \quad w_2 = \frac{b'_2}{\sigma_2} \ \dots \ w_r = \frac{b'_r}{\sigma_r}$

(Si hubieran más entradas de w: w_i con $i > r$ $\quad w_i = 0$)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \sigma_r & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Deshacemos el CV:

$w = V^t x \Rightarrow Vw = x$ $\quad \begin{pmatrix} V^{-1} = V^t \\ (V^t)^{-1} = V \end{pmatrix}$

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

$$\{(1,1), (2,0), (3,0), (4,0)\}$$

Gauss - Newton

parámetros

Tenemos datos $\{(x_i, y_i) \mid i = 1:5\}$ $f(x) = a(1 - e^{-bx})$

Si planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} a(1-e^{-bx_1}) = y_1 \\ a(1-e^{-bx_2}) = y_2 \\ a(1-e^{-bx_3}) = y_3 \\ a(1-e^{-bx_4}) = y_4 \\ a(1-e^{-bx_5}) = y_5 \end{cases}$$

No es algo de la forma

$$Aw = y$$

$$w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

No es un sistema lineal de ecuaciones. Son no-lineales respecto a a y b.

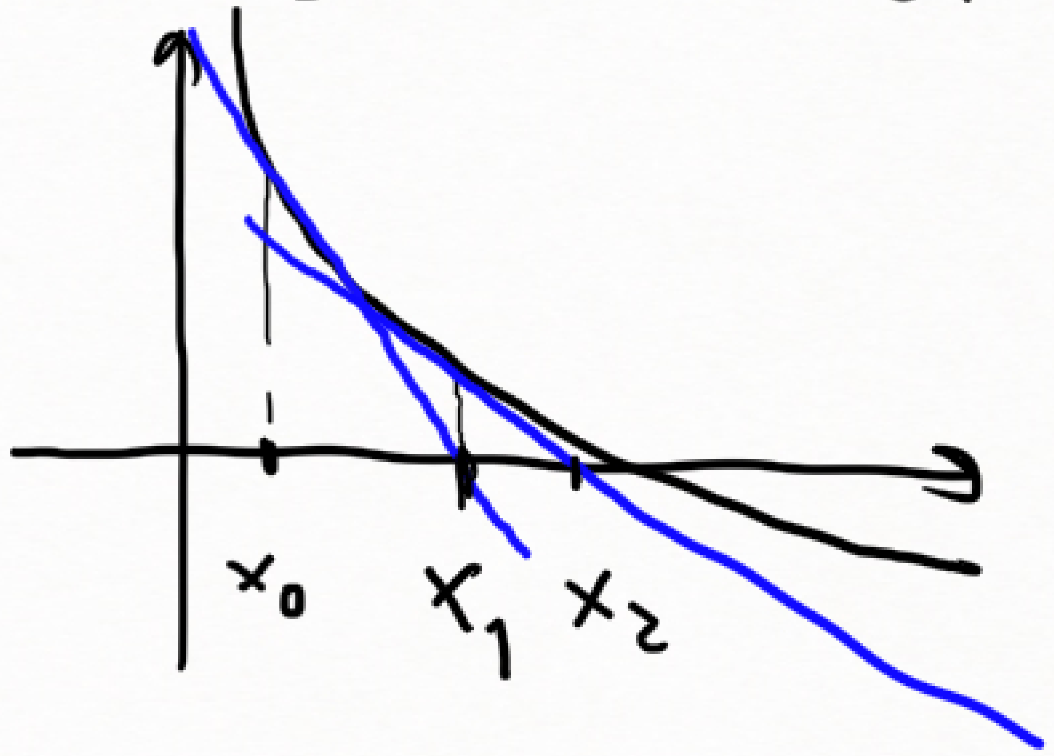
Igual vamos a definir un residuo y minimizar su norma. "$r \approx Ax - b$"

$$r(a,b) = \begin{pmatrix} a(1-e^{-bx_1}) - y_1 \\ a(1-e^{-bx_2}) - y_2 \\ a(1-e^{-bx_3}) - y_3 \\ a(1-e^{-bx_4}) - y_4 \\ a(1-e^{-bx_5}) - y_5 \end{pmatrix}$$

$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$

$$\boxed{\text{Nuestro objetivo es hallar } a, b \text{ que minimicen } \|r(a,b)\|_2}$$

El enfoque es iterativamente linealizar y resolver un problema lineal, como en Newton-Raphson.



$$f(x) = a(1-e^{-bx}) \qquad r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$$

→ Comenzamos con un $w_0 = (a_0, b_0)$

→ Linealizamos r en torno a w_0

$$r(w) \approx r(w_0) + \underbrace{J_{r,w_0}}_{\text{matriz jacobiana}}(w - w_0)$$

→ Resolvemos el problema linealizado

minimizar $\|r(w)\|_2$ → minimizar $\|r(w_0) + J_{r,w_0}(w-w_0)\|_2$

es un PMCL minimizar $\|Au - b\|$

con $\underline{A = J_{r,w_0} \quad b = -r(w_0)}$ $\quad \overbrace{u = w - w_0}^{CV}$

→ Deshacemos el CV

$$w_1 = w_0 + u$$

→ Iteramos hasta converger

Para implementarlo vamos a precisar r y $J_{r,w}$

$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ va a ser una función en octave.

$$r(a,b) = \begin{pmatrix} a(1-e^{-bx_1}) - y_1 \\ a(1-e^{-bx_2}) - y_2 \\ \vdots \\ a(1-e^{-bx_5}) - y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a(1-e^{-bx_1}) \\ \vdots \\ a(1-e^{-bx_5}) \end{pmatrix} \\ F(x_i) \end{array}$$

$J: \mathbb{R}^2 \to M_{5\times 2}(\mathbb{R})$

otra función en octave que dados a y b retorna una matriz.

$$J(a,b) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad F_1 \quad & \quad F_2 \quad \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1-e^{-bx_1} & ax_1e^{-bx_1} \\ 1-e^{-bx_2} & ax_2e^{-bx_2} \\ 1-e^{-bx_3} & ax_3e^{-bx_3} \\ 1-e^{-bx_4} & ax_4e^{-bx_4} \\ 1-e^{-bx_5} & ax_5e^{-bx_5} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \quad \frac{\partial}{\partial a} \quad & \quad \frac{\partial}{\partial b} \quad \end{matrix} \end{array}$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{cases} u'' = u' + e^t v \\ v'' = e^t u + v' \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} y_1(t) &= u(t) \\ y_2(t) &= v(t) \\ y_3(t) &= u'(t) \\ y_4(t) &= v'(t) \end{aligned}$$

$$y_1'(t) = y_3(t) \qquad y_1' = u' = y_3$$

$$y_2'(t) = y_4(t) \qquad y_2' = v' = y_4$$

$$y_3'(t) = y_3 + e^t y_2 \qquad y_3' = (u')' = u'' = \overbrace{u'}^{y_3} + e^t \overbrace{v}^{y_2}$$

$$y_4'(t) = e^t y_1 + y_4 \qquad f(t, y) = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_3 + e^t y_2 \\ e^t y_1 + y_4 \end{pmatrix}$$

datos en la letra

$$y_1(0) = u(0) \qquad y_3(0) = u'(0)$$

$$y_2(0) = v(0) \qquad y_4(0) = v'(0)$$