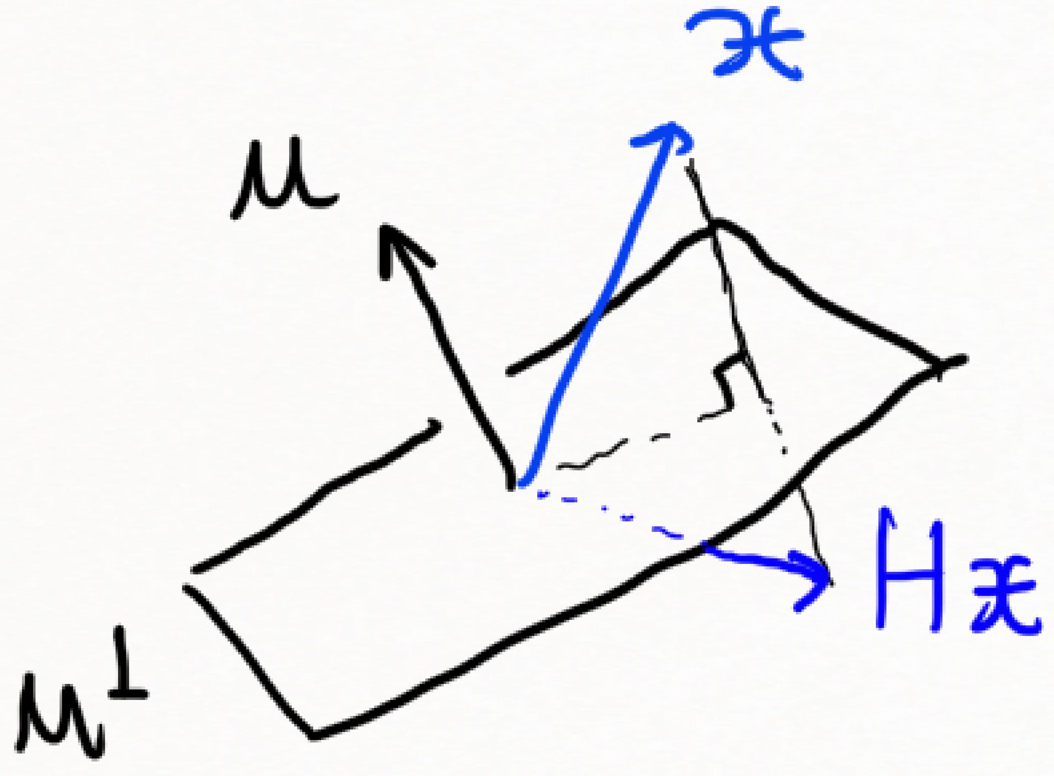
Dado $u \in \mathbb{R}^n$, $\quad H := I - \frac{2}{\|u\|_2^2} u u^t \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

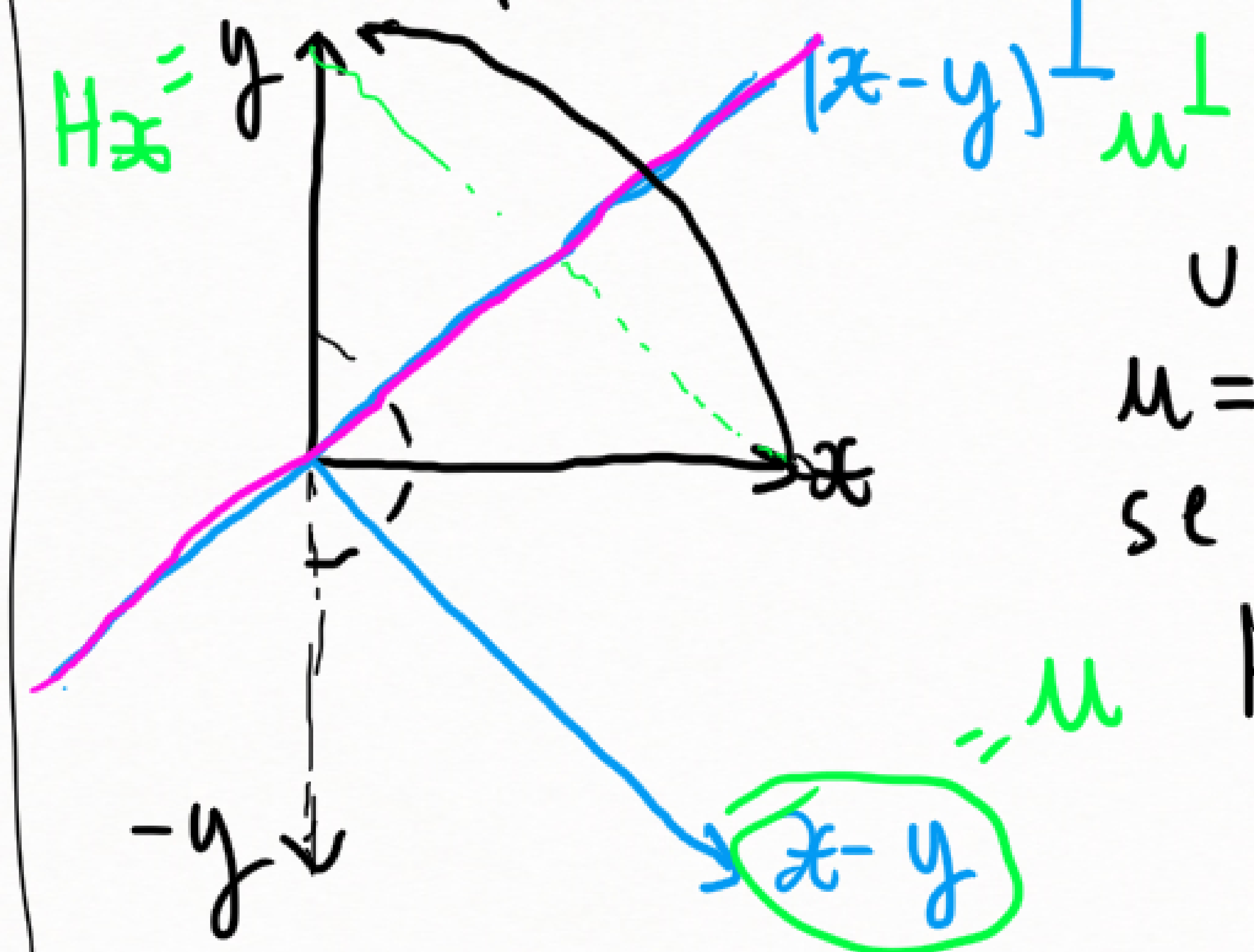
H es una matriz ortogonal ($\forall x \in \mathbb{R}^n \ \|Hx\|_2 = \|x\|_2$, $H^{-1} = H^t$ tb es ortogonal)

Aplicar H a un vector x (Hx) refleja x respecto al plano perpendicular a u.



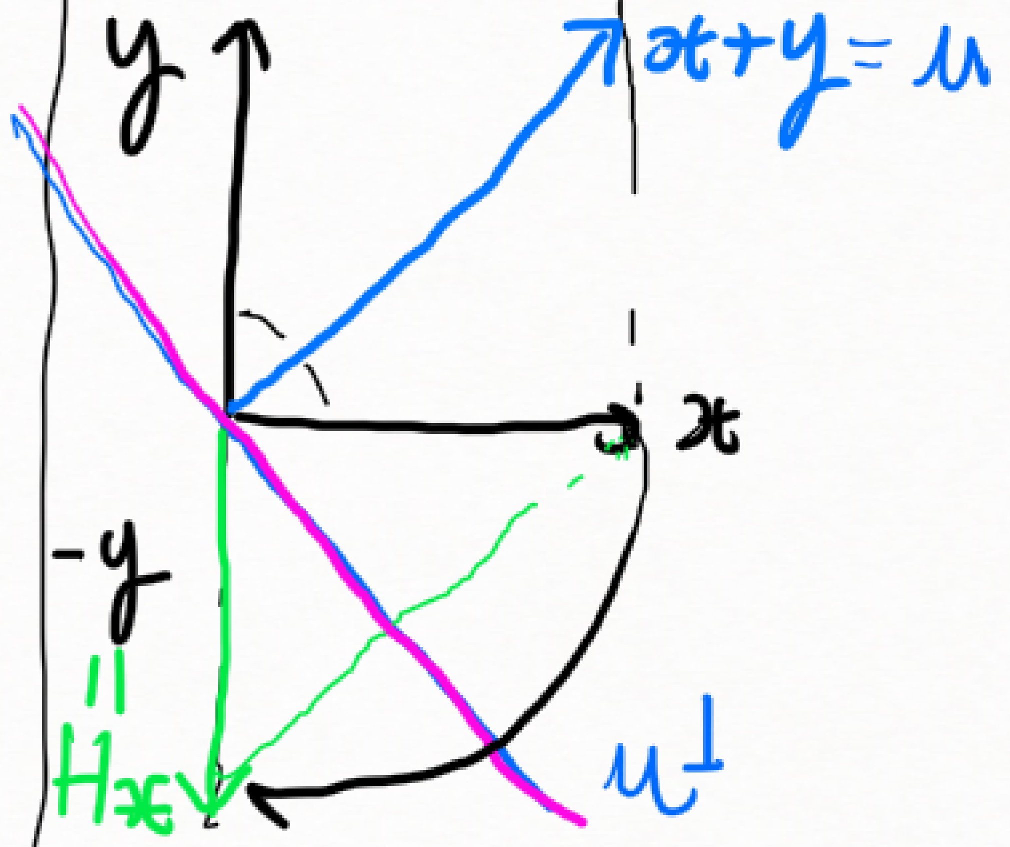
¿Cómo hacer para, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, hallar H tq $Hx = y$?

- Como H es ortogonal, necesariamente $\|x\| = \|y\|$
- Hay que hallar un vector u que genere la matriz H.



usando $u = x - y$, se cumple $Hx = y$

Si en vez usamos $u = x + y$:



$Hx = -y$

6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1} H_1A = \begin{pmatrix} a_{11}' & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$

primera columna es de matriz triang

$\xrightarrow{H_2} H_2H_1A = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & * \\ 0 & a_{22}' & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3} H_3H_2H_1A = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' \\ 0 & 0 & a_{33}' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$ triangular superior

las dos primeras columnas son de matriz triangular

$$\underbrace{H_3H_2H_1}_{\text{ortogonal}}A = R \Rightarrow A = \underbrace{[H_3H_2H_1]}_{\text{ortogonal}}^{-1}R = \underbrace{(H_3H_2H_1)}_{Q}^{t}R$$

· Producto de ortogonales es ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \left(A^{(1)} \mid A^{(2)} \mid A^{(3)} \right) \quad A^{(1)} \in \mathbb{R}^4 \text{ columnas}$$

En el primer paso queremos que la primera columna quede triangular.

$$H_1 \left(A^{(1)} \mid A^{(2)} \mid A^{(3)} \right) = \left(H_1 A^{(1)} \mid H_1 A^{(2)} \mid H_1 A^{(3)} \right) \overset{\text{queremos}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}' & \boxed{} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_1 \overbrace{A^{(1)}}^{x} = \begin{pmatrix} \overset{\pm \|A^{(1)}\|}{\overset{\shortparallel}{a_{11}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} \|A^{(1)}\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buscamos H_1 tq $H_1 A^{(1)} = \pm y$

$$\Rightarrow u_1 \to A^{(1)} - y$$
$$\hookrightarrow A^{(1)} + y$$

necesariamente $\|y\| = \|x\|$

Elegimos el del signo del primer elemento de $A^{(1)}$
(en las notas se habla de eso)

$$H_1A = \begin{pmatrix} -2 & * & * \\ 0 & \boxed{} & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Para hallar H_2 trabajamos con esa submatriz de 3×2

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1{,}33 \\ 1 & 3{,}66 \\ 2 & 10{,}67 \end{pmatrix}}^{B} \rightarrow \text{Hallo } \underline{\overline{H}_2} \text{ tq } \overline{H}_2 B = \begin{pmatrix} a_{22} & * \\ 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\overline{H}_2 \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$$

$$\overline{H}_2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Necesitamos $H_2 \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ $\quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{\overline{H}_2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -25 \\ 0 & -2{,}23 & -11{,}18 \\ 0 & 0 & \boxed{-0{,}73} \\ 0 & 0 & \boxed{1{,}86} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Con esto definimos } H_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}73 \\ 1{,}86 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \bar{H}_3 \;/\; \bar{H}_3 B = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo hallamos igual que antes y queda $\bar{H}_3 = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$B \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\boxed{\bar{H}_3}$}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$