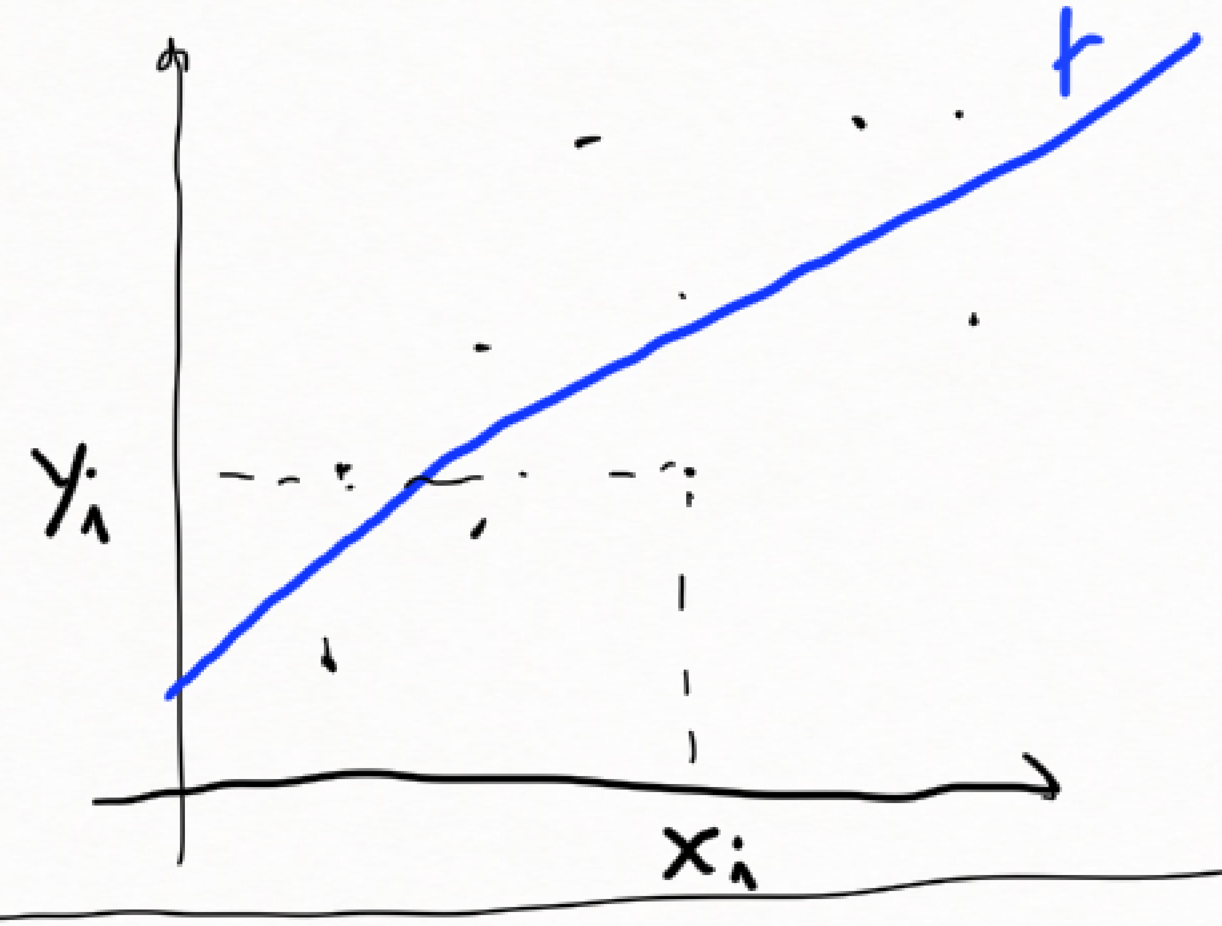
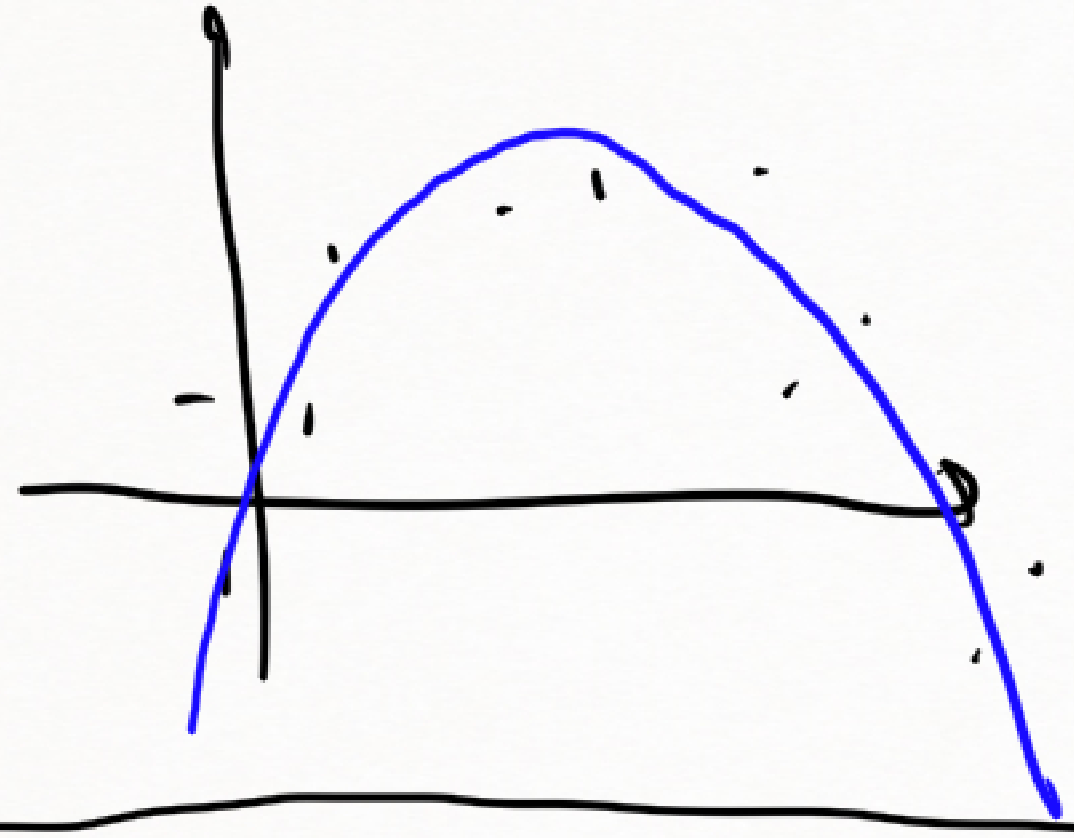
Ej lineal:



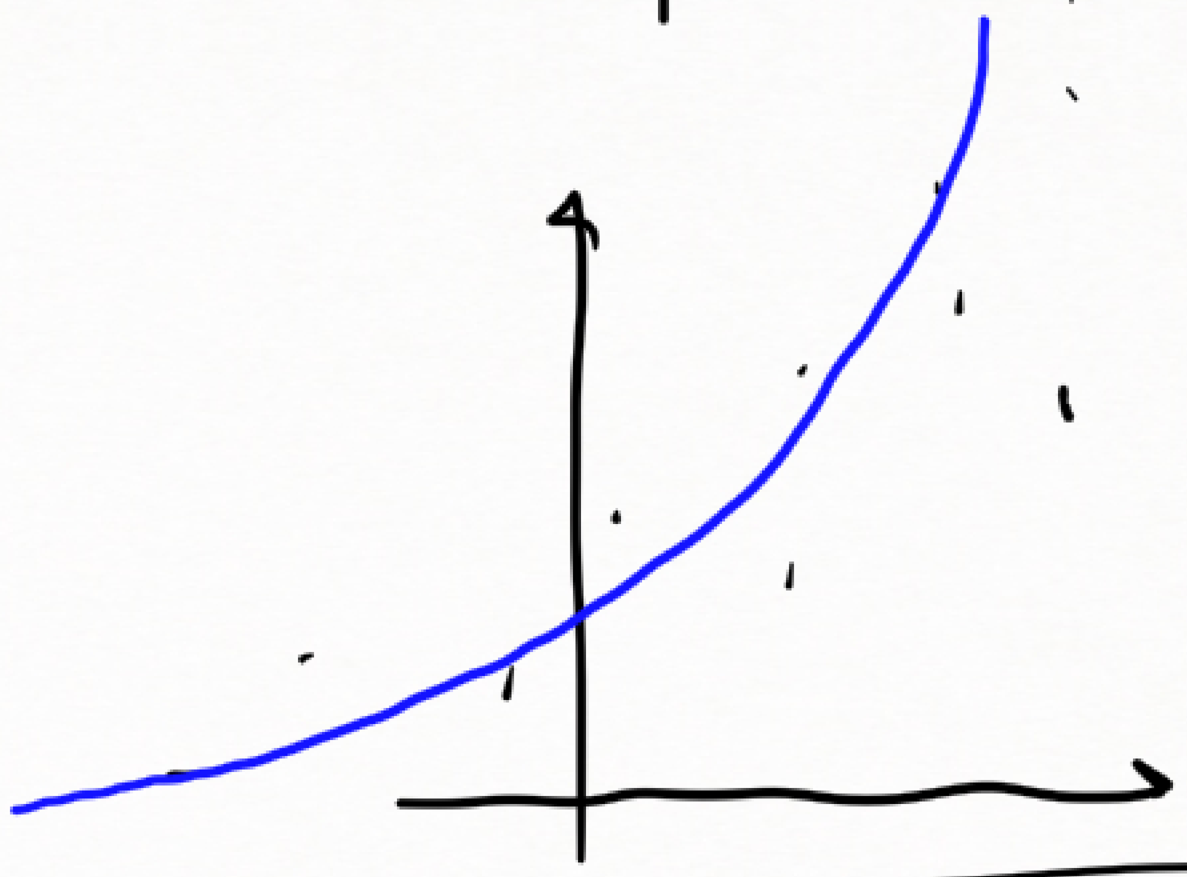
$\{(x_i, y_i) / i=1:n\}$

y buscamos la recta que en cierto sentido mejor aproxima

Ej: buscar la parábola que mejor aproxima



Ej: Exponencial que mejor aproxima



Para aplicar mínimos cuadrados tenemos que tener definido de antemano el tipo de función (lineal, cuadrática, etc)

① $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \,/\, i = 1:n\}$ queremos aproximar por una función de forma $f(x) = \underline{a}x^3 + \underline{b}x + \underline{c}$ incógnitas que hay que hallar.

La idea es llevar esto a algo de la forma $Az = v$.

No van a cumplirse exactamente todas las observaciones, pero comenzamos planteando las ecuaciones como si sí se cumplieran todas de forma exacta.

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \\ \vdots \\ f(x_n) = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} ax_1^3 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^3 + bx_2 + c = y_2 \\ \vdots \\ ax_n^3 + bx_n + c = y_n \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{v} \iff Az = b$$

f pasa por los puntos

$Az = v$ es (probablemente) incompatible. No hay solución exacta pero buscamos en algún sentido lo que esté más cerca de su solución.

$$Az = v \iff Az - v = 0 \iff \underline{\|Az - v\|_2 = 0}$$

definimos z es la solución en sentido de mínimos cuadrados si z minimiza $\|Az - v\|_2$

z es el vector que hace que $\|Az - v\|_2$ sea lo más chico posible.

- Siempre existe el z. Puede ser único o no.

<u>Ecuaciones normales</u>: z es solución del PMC $\iff \overbrace{A^T A z = A^T v}^{\text{ecuaciones normales}}$

Teniendo la matriz A y el vector v se pueden plantear las ecuaciones normales.

$$A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ec norm: $\underbrace{A^t A}_{\text{calcular}} z = \underbrace{A^t v}_{\text{calcular}}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^6 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A^t v = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 & \cdots & x_n^3 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}}_{w}$$

La solución del PMC es resolver

$$Bz = w$$

con eso hallamos $(a, b, c) = z$

Descomposición QR

Escribir la matriz A como multiplicación de dos matrices: Q y R $\quad A = QR$
de modo que: 1) Q es ortogonal y 2) R es triangular superior

$$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R}) \quad R \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} = \underset{Q}{\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}} \cdot \underset{R}{\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & r_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

$m \geq n$ $\quad$ cuadrada $\quad$ misma forma que A

Matrices ortogonales

$Q \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ es ortogonal sii sus columnas son una bon de $\mathbb{R}^m$

1) $\forall v \in \mathbb{R}^m \quad \|Qv\|_2 = \|v\|_2$

2) $Q^{-1} = Q^t$ y también es ortogonal

3) Q_1, Q_2 son matrices ortogonales $\Rightarrow Q_1 Q_2$ también lo es

z es sol de PMC si z minimiza $\|Az - v\|_2$.

Vamos a usar la desc. QR de A para hallar el z.

$$\|Az - v\|_2 = \|QRz - v\|_2 = \|\underbrace{Q^TQ}_{Id}Rz - Q^Tv\|_2 = \|Rz - Q^Tv\|_2$$

Propiedades 1 y 2 de antes

Hallamos z que minimice $\|Rz - Q^Tv\|_2$, lo cual es más fácil porque R es triangular.

Veamos nuestro caso en que hay 3 columnas. (Ej 1)

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^Tv = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

números que se calculan

$Rz - Q^Tv$ = 0

$$\|Rz - Q^Tv\|_2 = \left\| \begin{matrix} r_{11}a + r_{12}b + r_{13}c - \alpha_1 \\ r_{22}b + r_{23}c - \alpha_2 \\ r_{33}c - \alpha_3 \\ -\alpha_4 \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{matrix} \right\|_2$$

aparecen a, b, c en un sistema escalerizado.

a, b, c no afectan

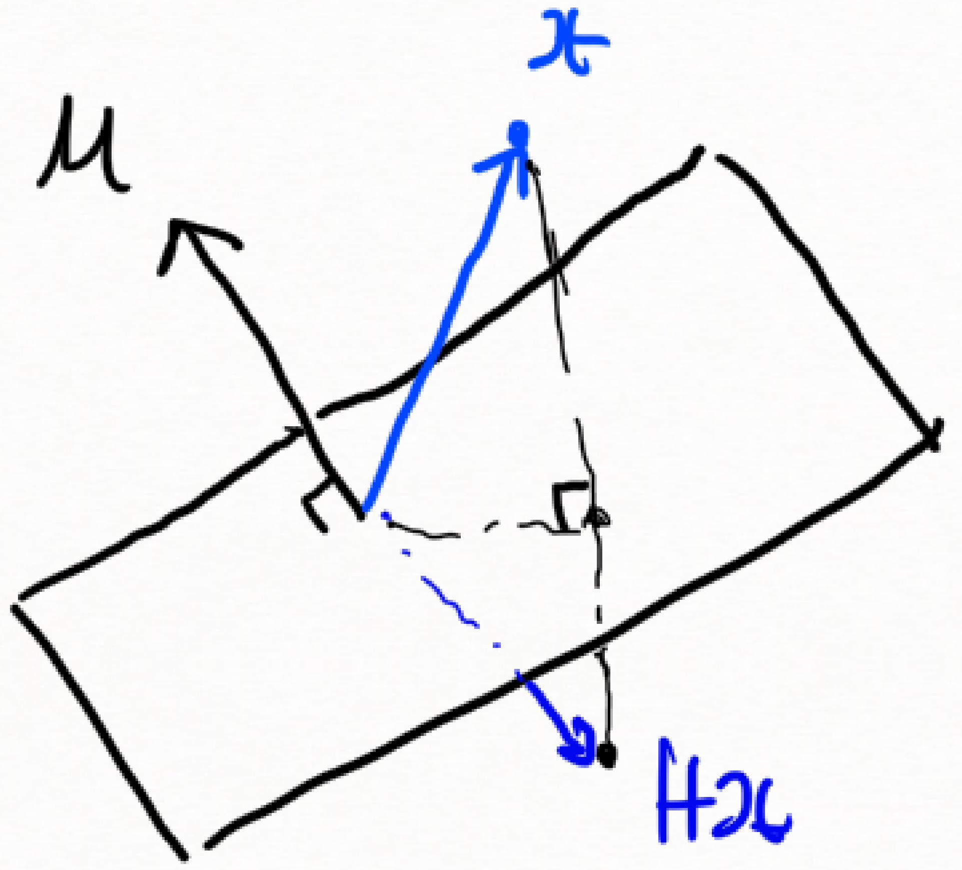
Para minimizar la norma, elegimos a, b, c para que las 3 primeras entradas sean 0.

Conclusión: Agarramos las 3 primeras filas de R, las 3 primeras entradas de Q^Tv y resolvemos el sistema 3x3

Reflexiones de Householder

Dado $\underset{\neq 0}{u} \in \mathbb{R}^m$ definimos una matriz $H \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ con $\boxed{H = I - \frac{2}{\|u\|_2^2} u u^t}$

Multiplicar H por un vector x simetriza x respecto al plano perpendicular a u.



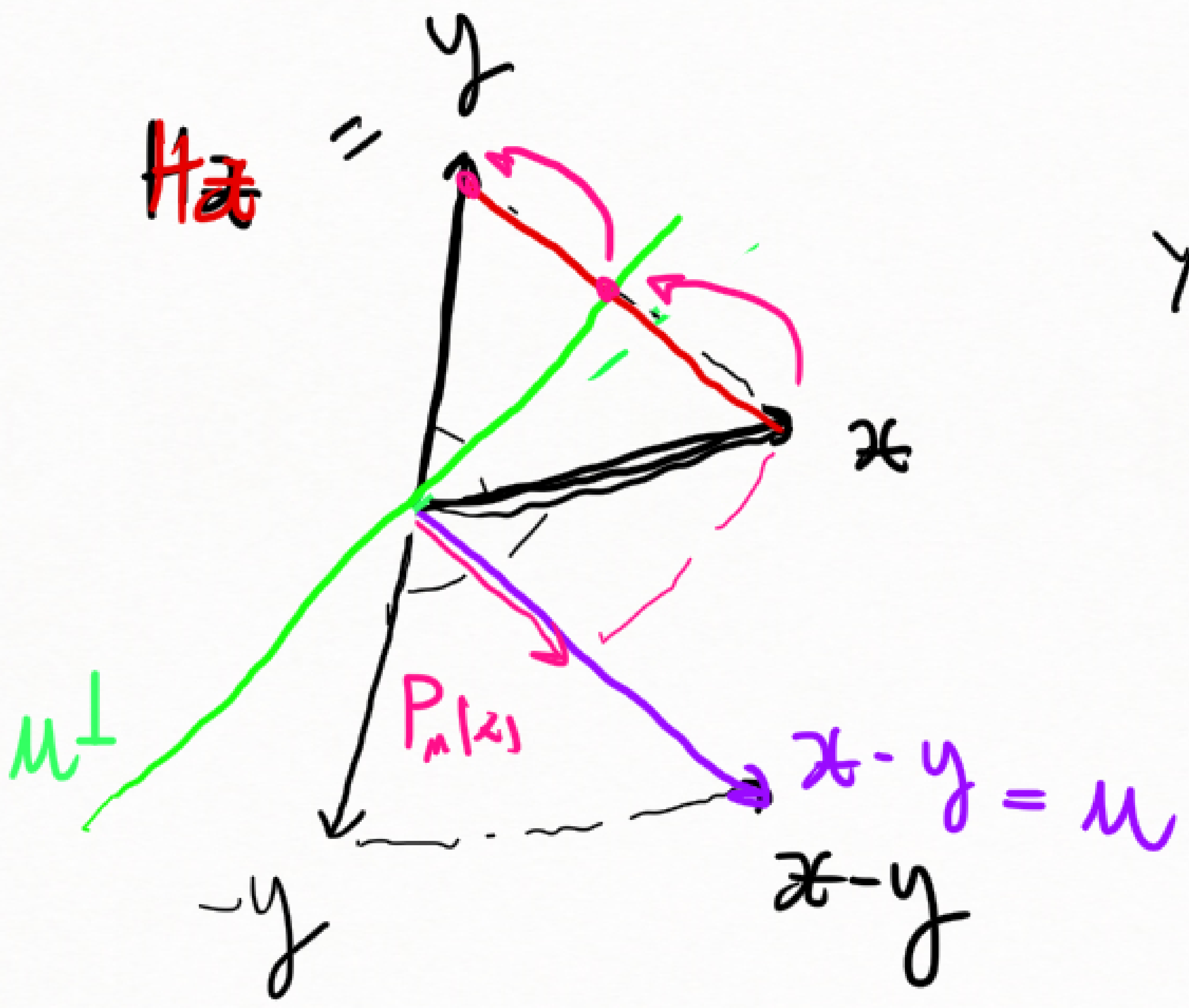
Cada vector u da lugar a una matriz H que simetriza respecto al plano $u^{\perp}$ y estas matrices H son ortogonales

(4) $x = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ queremos H tq $Hx = y$.

como H es ortogonal preserva norma, entonces si $Hx = y$, necesariamente $\|y\|_2 = \|x\|_2$ ✓

lo verificamos.

Para hallar H hay que hallar el vector u.



Basta tomar $u = x - y$

y con ese u la matriz H

cumple $Hx = y$