$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos hallar $x^* \in \mathbb{R}$ tq $f(x^*) = 0$

lo que hacemos es construir una sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tq $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$ mediante algún método.

Métodos iterativos generales (MIG)

Tenemos una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq la raíz de f es punto fijo de g.

$$f(x^*) = 0 \iff g(x^*) = x^* \quad *$$

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R} \\ x^{k+1} = g(x^k) \end{cases} \quad (MIG)$$

$$x^0 \to g(x^0) \to g(g(x^0)) \to \cdots$$

Cada función g que cumpla $*$ define un MIG.

Ej: Newton-Raphson

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x^{k+1} = g(x^k) = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad \checkmark$$

verificar que cumple $*$

$$g(x) = x \iff x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

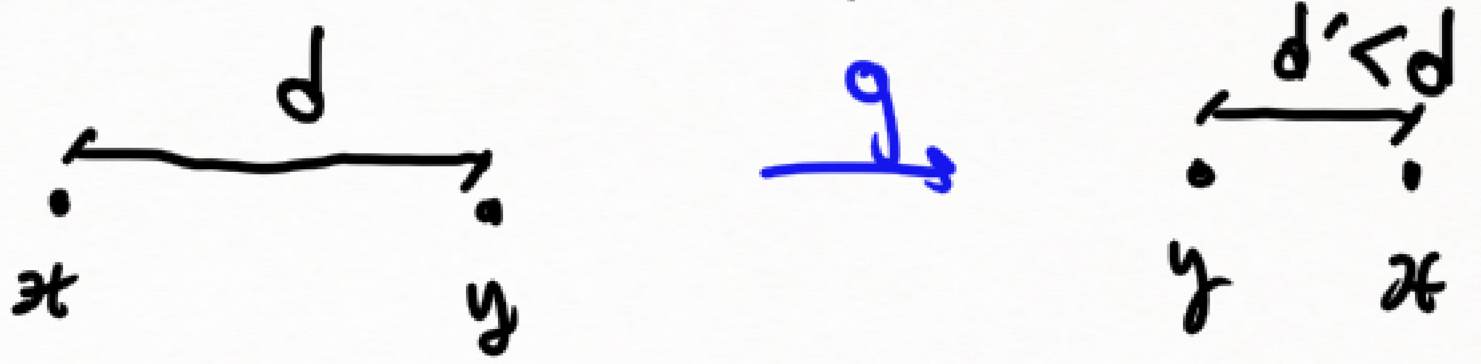
$$\iff \frac{-f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0$$

Dado un MIG: 1) Hay que ver si converge $x^k \longrightarrow x^*$

2) En caso de que converja, hay que ver el orden y la velocidad.

- Lo primero que hay que hacer es ver si converge (salvo por $f(x^*)=0 \Leftrightarrow g(x^*)=x^*$)
- Una vez que sabemos que converge, analizamos el orden y velocidad de convergencia usando el Teo 4.7.4 de las notas.

Def: $g: I \to I$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ g es una contracción $\Leftrightarrow \exists c<1$ $(0\leq c)$ $\forall x,y \in I$ $|g(x)-g(y)| \leq c|x-y|$



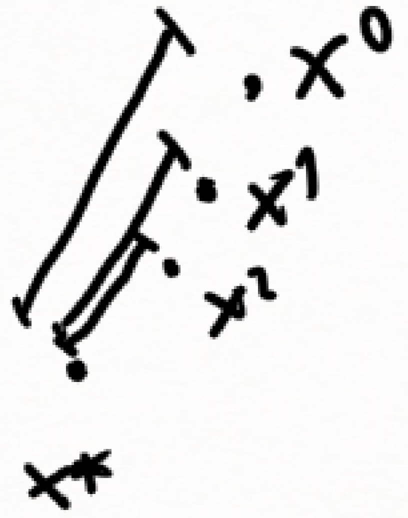
Teo: $g: I \to I$ una contracción

$\Rightarrow \exists!\, x^* \in I$ punto fijo de g $(g(x^*)=x^*)$

y para cualquier $x^0 \in I$, el MIG

$$\begin{cases} x^0 \\ x^{k+1}=g(x^k) \end{cases}$$ converge a x^*

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$$



¿Cómo hacer para ver si g es contractiva?

En general no vamos a usar la definición directamente. Vamos a usar el Ej 4.7.1 de las notas.

Prop (Ej 4.7.1) * $g: I \to I$ g es C^1 y $\exists c,\ 0 \leq c < 1 \ / \ |g'(x)| \leq c \ \forall x \in I$

$\Rightarrow$ g es una contracción

<u>Dem:</u> sean $x, y \in I$ tq $x < y$. Quiero probar $|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|$

Vamos a usar el teorema de valor medio de Lagrange.

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = g'(\gamma_{xy}) \quad \text{con } \gamma_{xy} \in (x, y)$$

Tomo valor absoluto

$$\frac{|g(y) - g(x)|}{|y - x|} = |g'(\gamma_{xy})| \leq c$$

$$\Rightarrow |g(y) - g(x)| \leq c|y - x|$$

$\square$

<u>Corolario:</u> si g es C^1 y $|g'(x^*)| < 1$

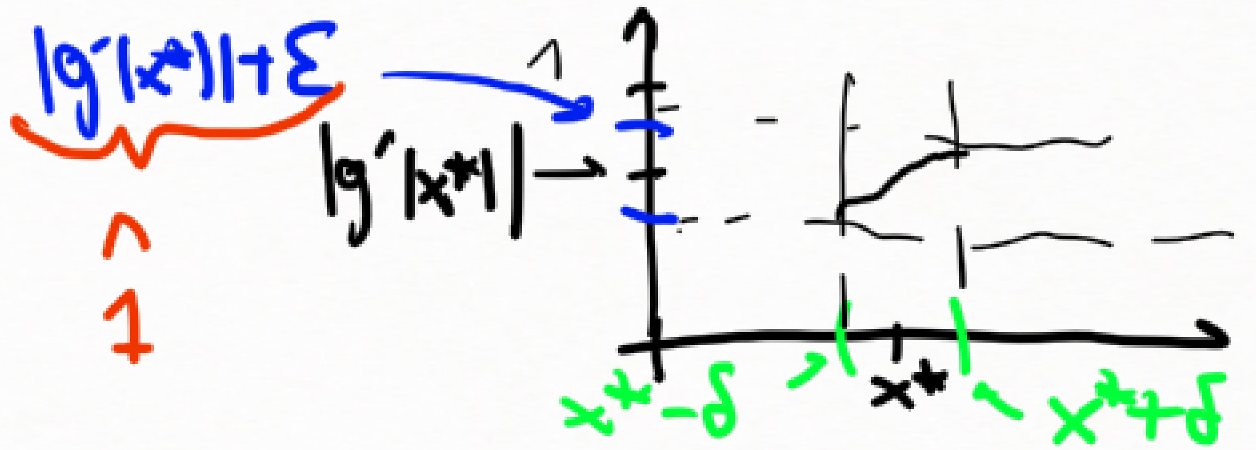
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ con $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$

$g: I \to I$ es una contracción

<u>Dem:</u>

$|g'(x^*)| < 1 \Rightarrow$ por continuidad, $\exists \delta > 0 \ /$

$x \in [x^* - \delta, x^* + \delta] \Rightarrow |g'(x)| < |g'(x^*)| + \varepsilon < 1$

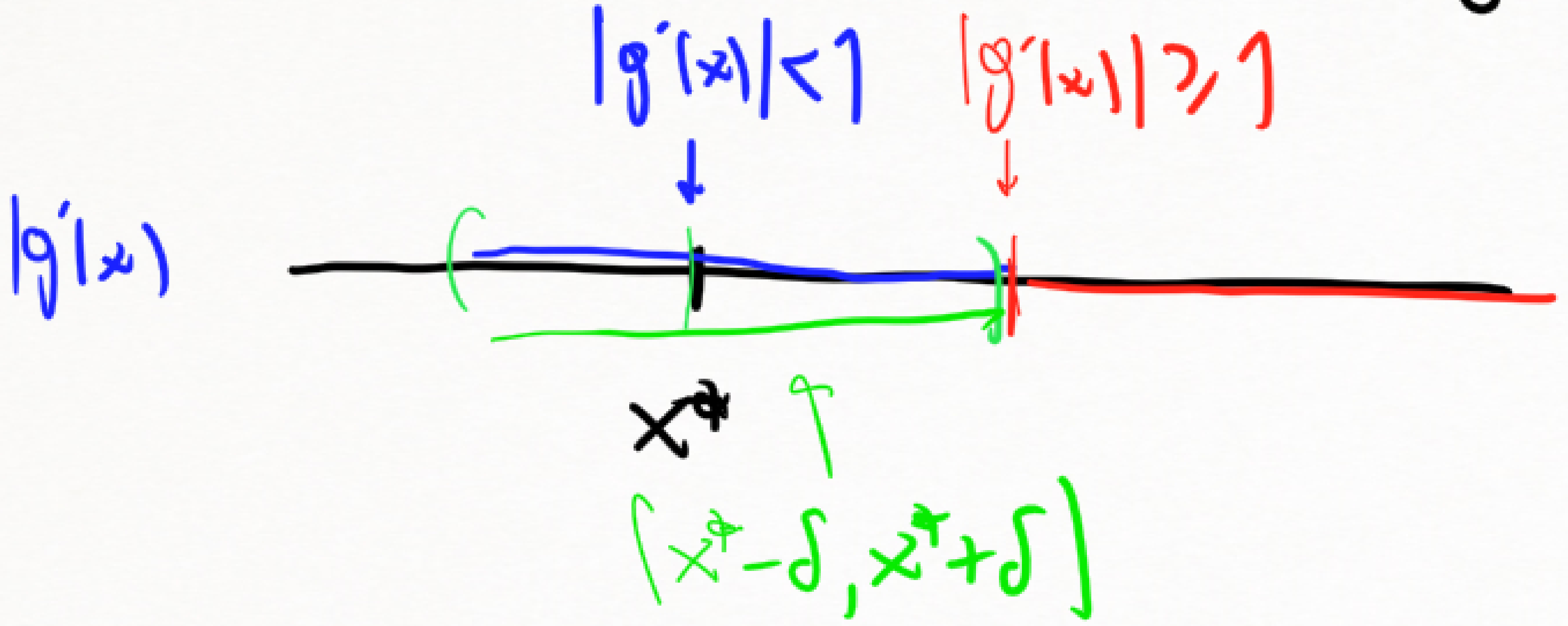


Entonces con $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ estamos en las H de *

Conclusión: si g es C^1 y $|g'(x^*)| < 1$
entonces, $\exists \delta > 0 /$ con $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ g es una contracción, lo cual significa que si $x^0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ entonces el MIG.

Si arrancamos suficientemente cerca, tenemos convergencia asegurada.

Si g' no es muy complejo y podemos ver dónde $|g'(x)| < 1$, con eso sabemos exactamente hasta dónde llega el δ.



Normalmente no hace falta calcular exactamente el δ.

8) Hallar x tq $x + \log(x) = 0$. Se proponen 3 iteraciones

1) $x^{k+1} = -\log(x^k) = g_1(x^k)$

2) $x^{k+1} = e^{-x^k} = g_2(x^k)$

3) $x^{k+1} = \dfrac{x^k + e^{-x^k}}{2} = g_3(x^k)$

Primero que nada, las 3 cumplen

$$\boxed{x + \log(x) = 0 \iff g_i(x) = x}$$

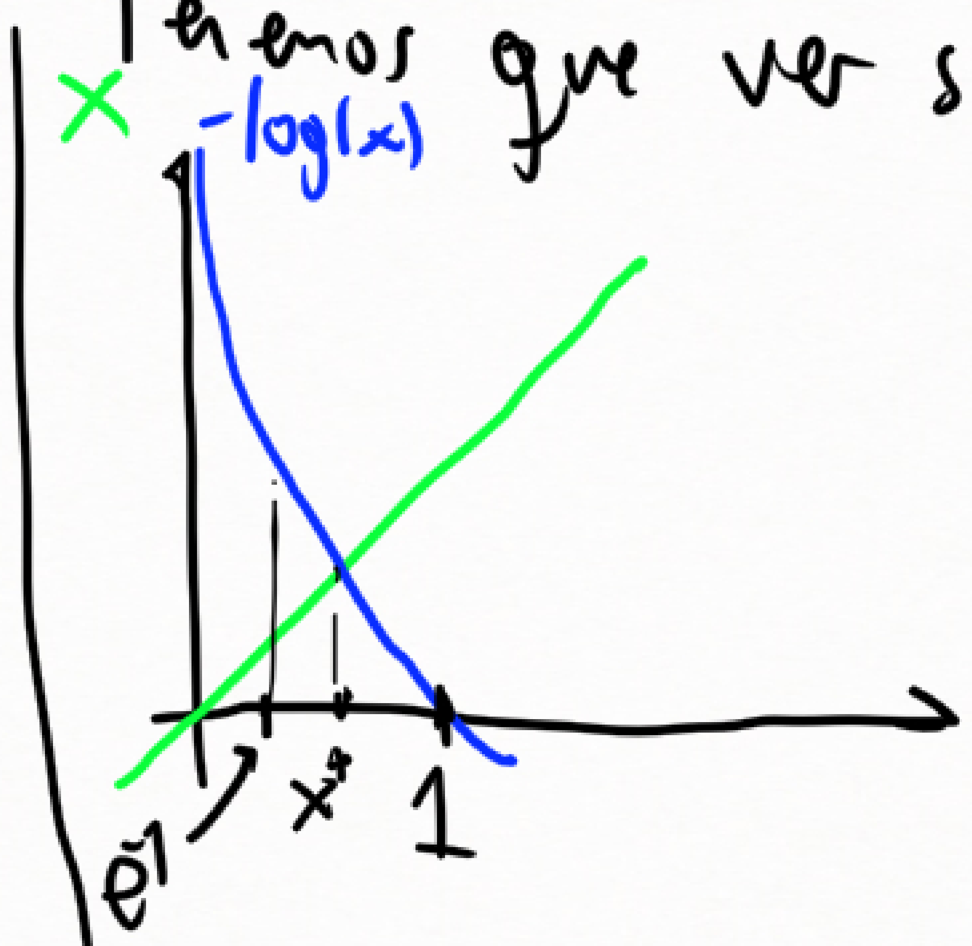
x ej la tercera

$$g_3(x) = x \iff \frac{x + e^{-x}}{2} = x \iff \frac{e^{-x}}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\iff e^{-x} = x \iff -x = \log(x) \checkmark$$

Vamos a ver si convergen, usando Corolario

Tenemos que ver si cumplen $|g_i'(x^*)| < 1$ con x^* la solución.



$x^* \in (0,1)$.

Por Bolzano $1 + \log(1) = 1$
$e^{-1} + \log(e^{-1}) = e^{-1} - 1 < 0$ $\Rightarrow x^* \in (e^{-1}, 1)$

Método 1:

$g_1'(x) = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow |g_1'(x)| = \dfrac{1}{x}$

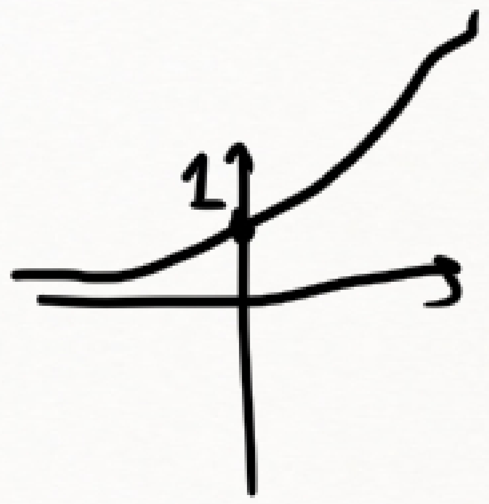
como $0 < x^* < 1$ $\quad |g_1'(x^*)| = \dfrac{1}{x} > 1$ ✗

Método 2:

$g_2'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |g_2'(x)| = e^{-x}$

como $0 < x^*$ $\quad |g_2'(x^*)| = e^{-x^*} < 1$ ✓

Método 3:



$g_3'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{2}$

$|g_3'(x)| = \dfrac{|1 - e^{-x}|}{2}$

como $0 < x^*$, $\in (0,1)$

$|g_3'(x^*)| = \dfrac{|1 - e^{-x^*}|}{2} < \dfrac{1}{2}$ ✓

Teorema de orden y velocidad de convergencia

g es C^r, $g(x^*) = x^*$, y suponemos que la sucesión del MIG ($x^{k+1} = g(x^k)$) converge a x^*

entonces

el orden de convergencia es p, con $p \leq r$ $\iff$ p es el menor número tq $g^{(p)}(x^*) \neq 0$

y la velocidad es $\beta = \frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$

$(\forall i < p \;\; g^{(i)}(x^*) = 0$ y $g^{(p)}(x^*) \neq 0)$

$0 < x^* < 1$

$g_2'(x) = e^{-x}$

$g_3'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{2}$

$g_2'(x^*) = e^{-x^*} \neq 0$

$\Rightarrow$ el método 2 tiene orden 1

$g_3'(x^*) = \frac{1 - e^{-x}}{2} \neq 0$

$x \neq 0$

única raíz

$\Rightarrow$ el método 3 tb tiene orden 1.

En la letra dice $x^* \approx 0{,}5$. Usamos eso para aproximar la velocidad de conv.

Met2: $\beta_2 = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$

Met3: $\beta_3 = \frac{1 - e^{-0{,}5}}{2} \approx 0{,}197$

$\Rightarrow$ El mejor es el 3

$$|e^{k+1}| \approx \beta |e^k|^p$$

vel de convergencia

cuanto más chico mejor

$$\beta = \lim_{k \to \infty} \frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^p}$$