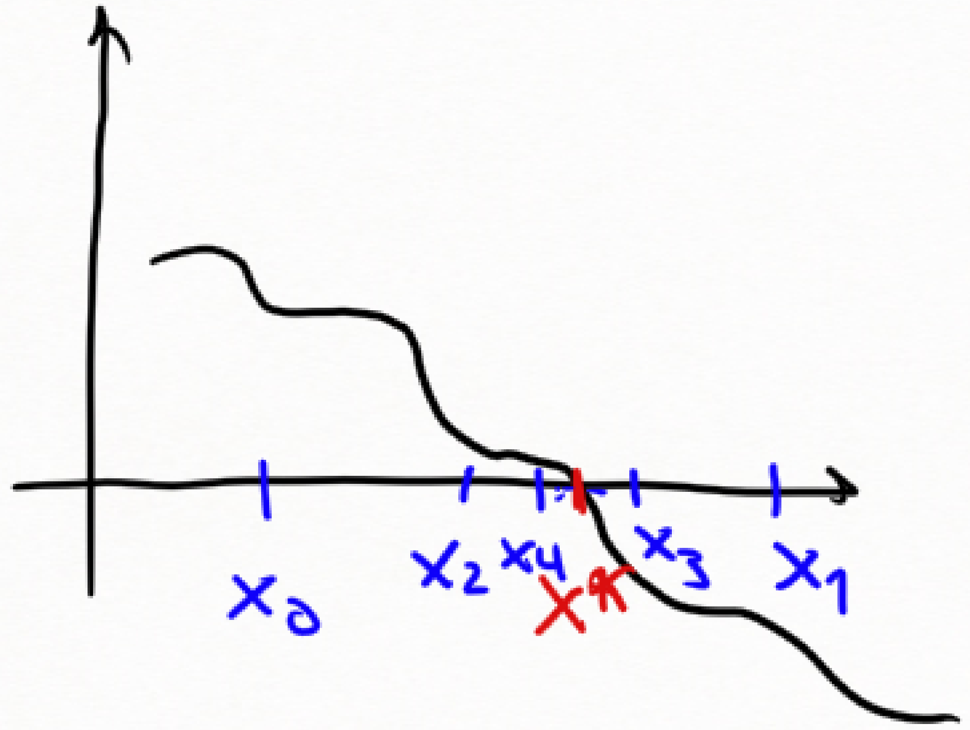
$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ queremos hallar $x^*\in\mathbb{R}$ tq $F(x^*)=0$

en casos en los que no se puede despejar a mano (en general).

Vamos a construir una sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tq $x^n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$



Hay distintos métodos para construir la sucesión.

→ Bisección

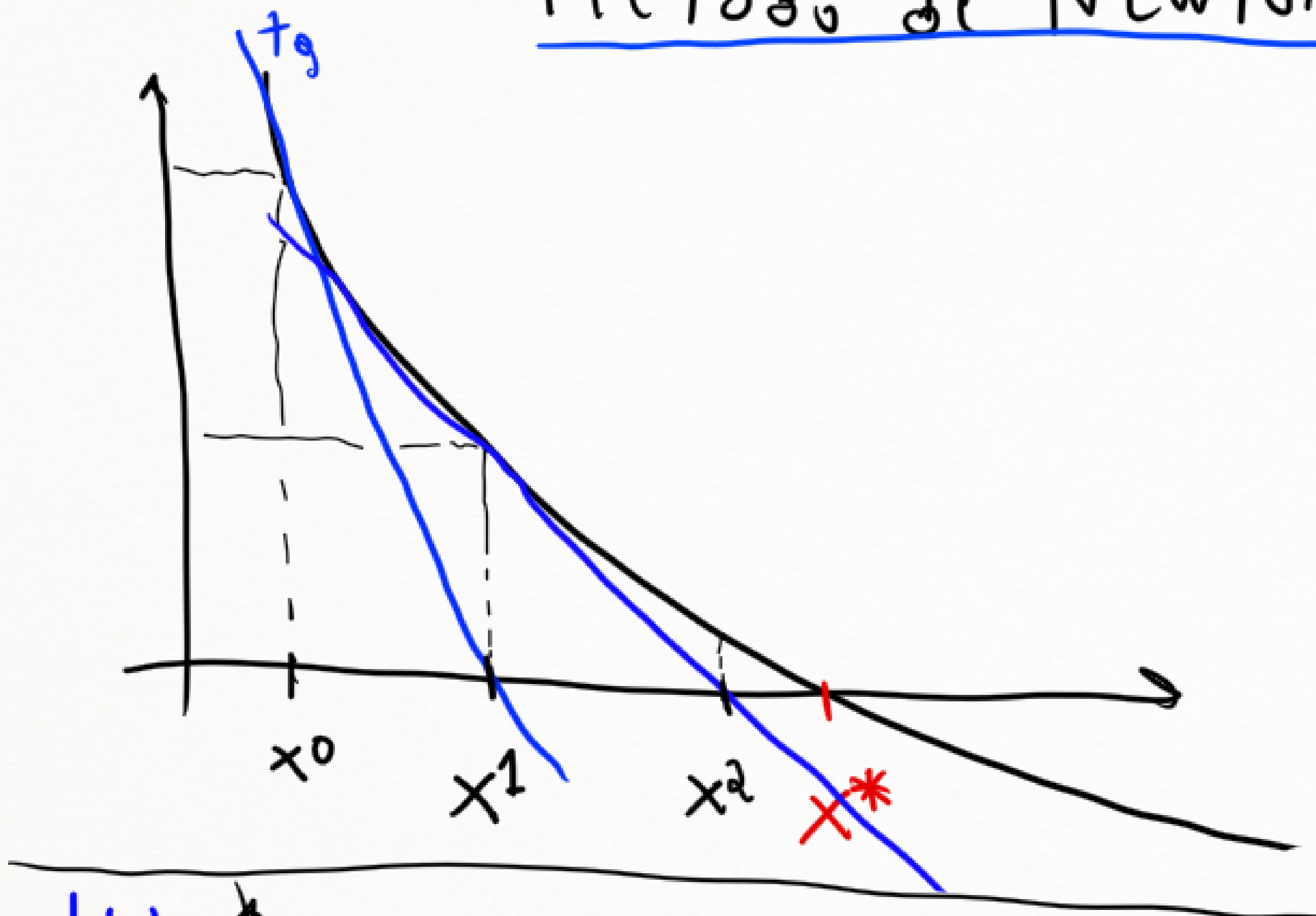
→ Regla Falsa

→ Secante

→ Newton-Raphson

(se pueden definir otros)

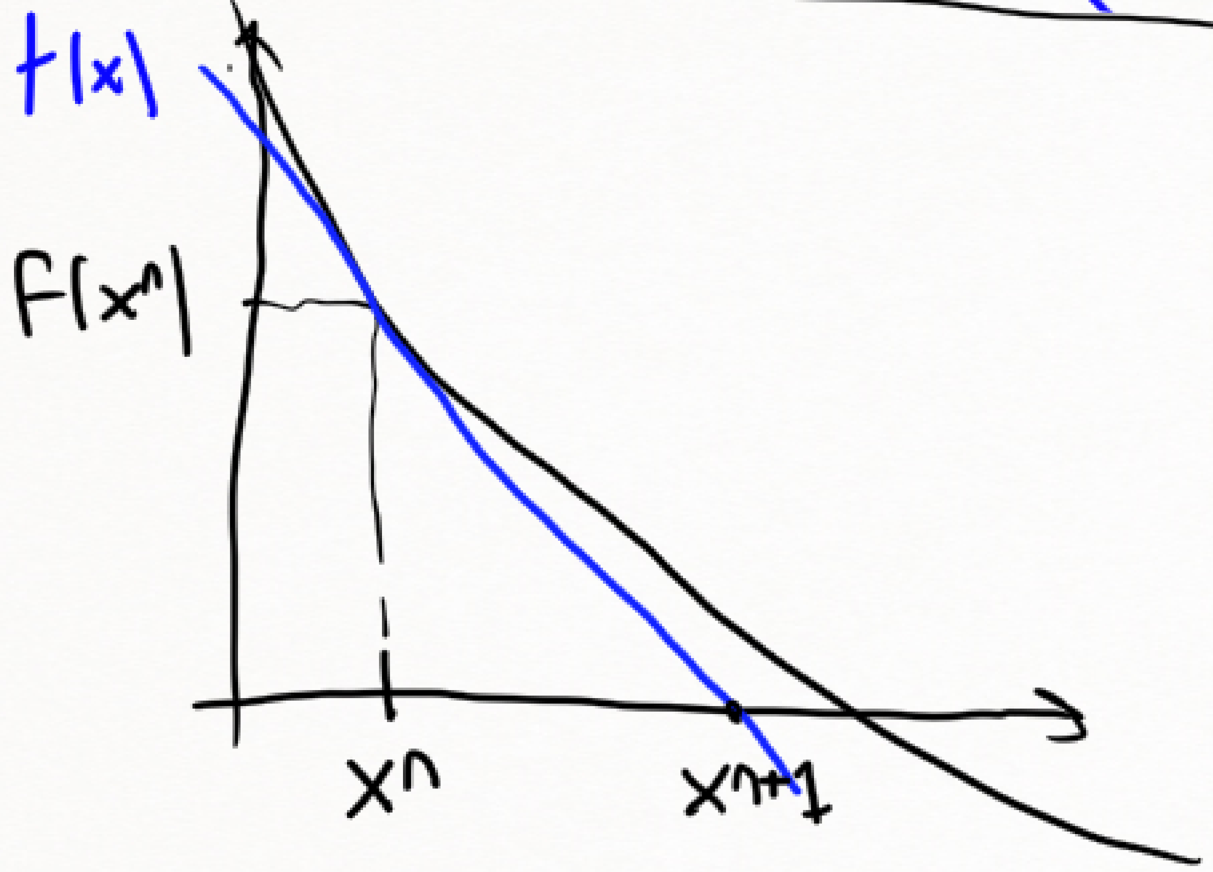
Método de Newton-Raphson



x^0 valor inicial "cercano a x^*"

$x^n \mapsto x^{n+1}$ trazo la tangente por $(x^n, F(x^n))$ y la intersecto con eje x.

t recta que pasa por $(x^n, F(x^n))$ con pendiente $F'(x^n)$.

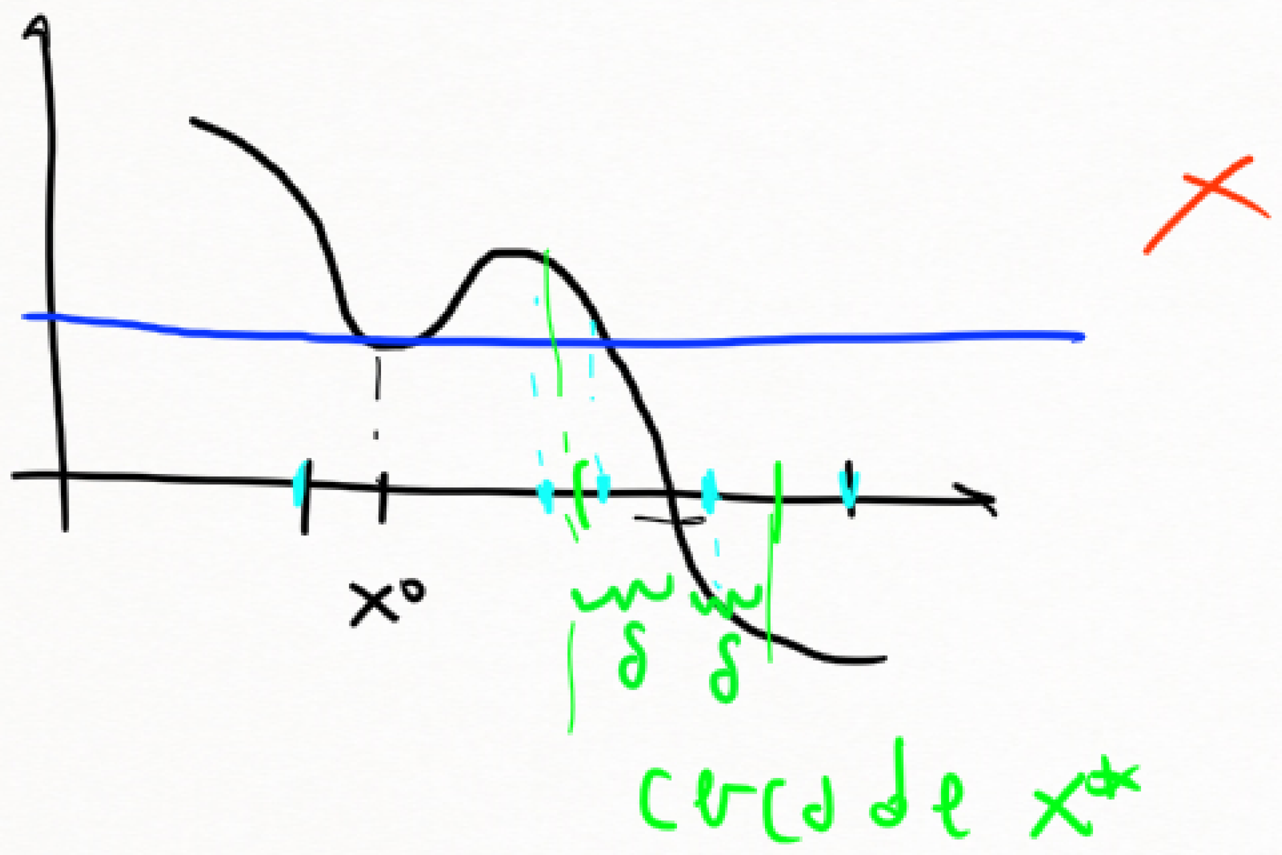


$$t(x) = F(x^n) + F'(x^n)(x - x^n)$$

$$t(x) = 0 \iff F'(x^n)(x - x^n) = -F(x^n)$$

$$\iff \underbrace{x}_{x^{n+1}} = x^n - \frac{F(x^n)}{F'(x^n)}$$

$$\boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{F(x^n)}{F'(x^n)}}$$



x^0
δ
δ
cerca de x^*

Orden y velocidad de convergencia

$x^n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ $\qquad e^n := x^n - x^*$ $\qquad |e^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Asumimos que x^n converge a x^*. Probar esa convergencia es otro tema.
Queremos medir qué tan rápido converge.

Def. El orden de convergencia es $p \geq 1$ si p es el máximo número real tq:

$$\underbrace{\text{existe } K>0 \text{ y } n_0>0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |e^{n+1}| \leq K \cdot |e^n|^p}_{|e^{n+1}| = O(|e^n|^p) \text{ con } n\to\infty}$$

$\beta = \lim \dfrac{|e^{n+1}|}{|e^n|^p}$

$|e^{n+1}| \approx \beta |e^n|^p$

cuanto más chico, mejor

$|e^n| \to 0 \qquad |e^n|$ es chico. $\qquad |e^{n+1}| \leq K \underbrace{|e^n|}_{<1}^{p}$

cuanto más grande es, más se achica el resultado

$\Rightarrow$ cuanto mayor es p, más rápido es la convergencia

velocidad de convergencia es $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|e^{n+1}|}{|e^n|^p}$

Ninguna de estas cosas tiene xq existir, pero en los métodos comunes, normalmente existen

$e^n = x^n - x^*$ ← no lo conocemos

$f(x^*) = 0$ $\quad\quad$ $\underbrace{f(x^n)}$ $\to 0$

sí lo podemos calcular

$\text{residuo}_n = f(x^n)$

quiero hallar una raiz de f.

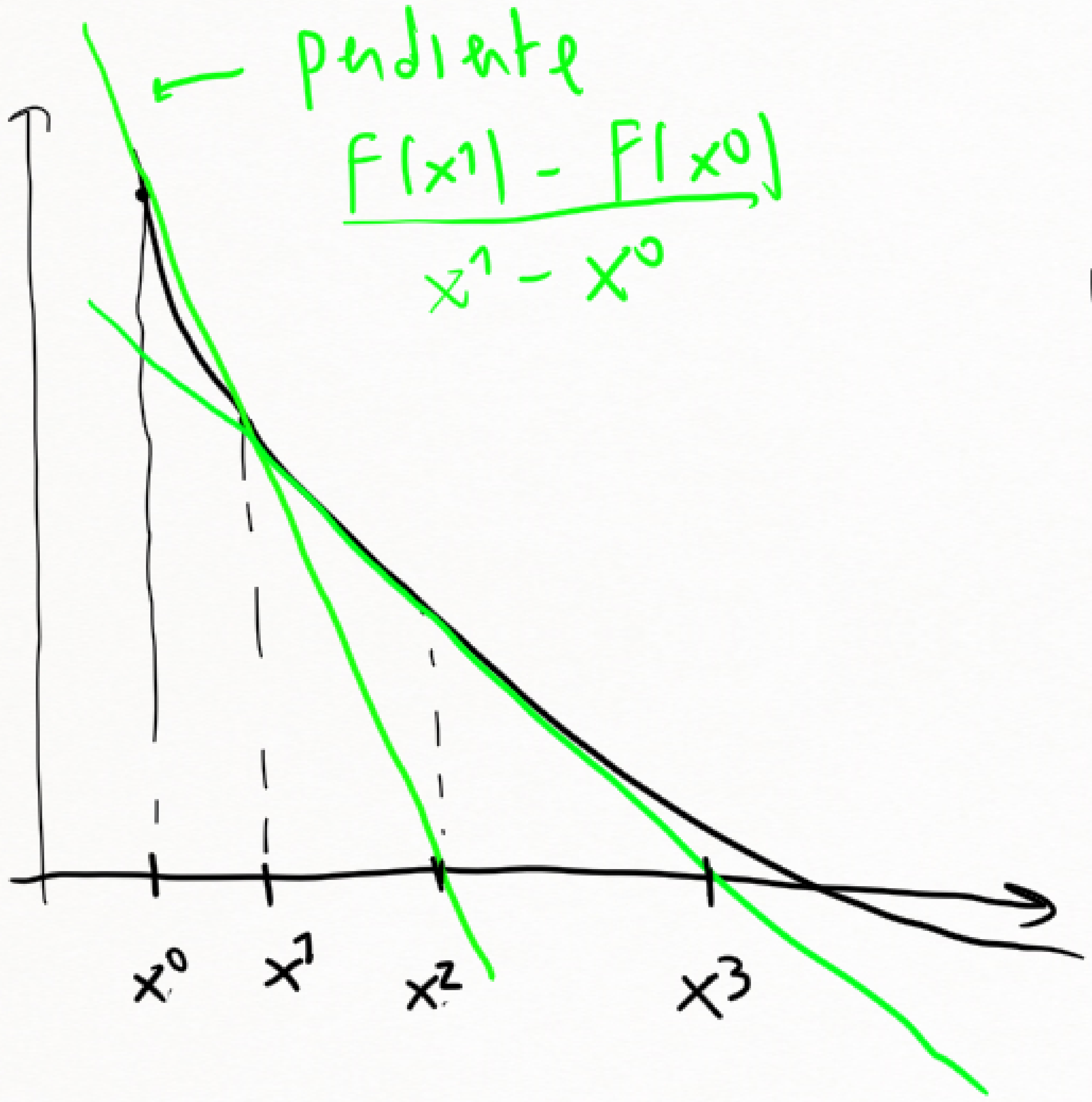
tomo como criterio de parada

que $|f(x^n)| \leq 10^{-7}$

Método de la secante

Diferencias respecto a Newton: 1) No se usa F' 2) Necesita dos valores iniciales x^0, x^1

3) Para calcular x^{n+1} se precisan x^n y x^{n-1} (usa los dos anteriores)



Newton $x^{n+1} = x^n - \frac{F(x^n)}{F'(x^n)}$

Secante $\boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{F(x^n)}{P\left(\frac{F(x^n) - F(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}\right)}}$

x^{n-1}	x_2
x^n	x_n
x^{n+1}	x_5