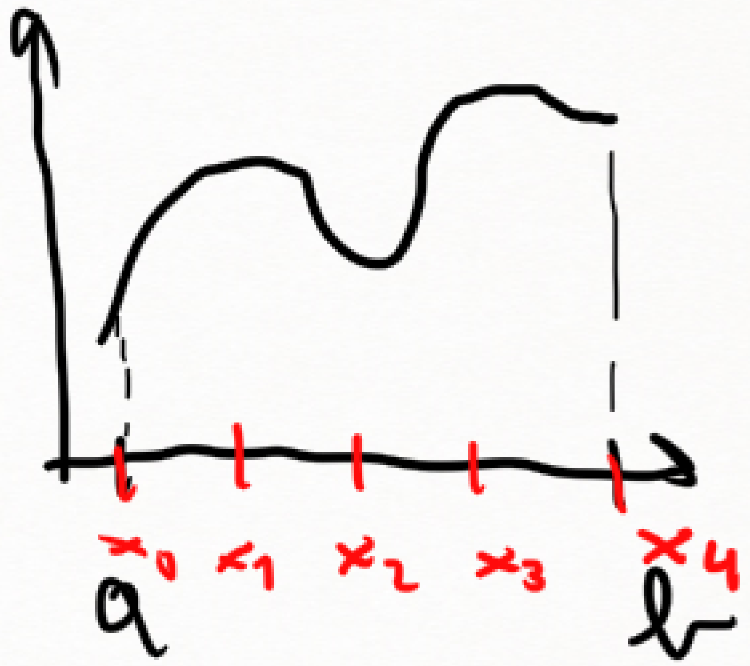
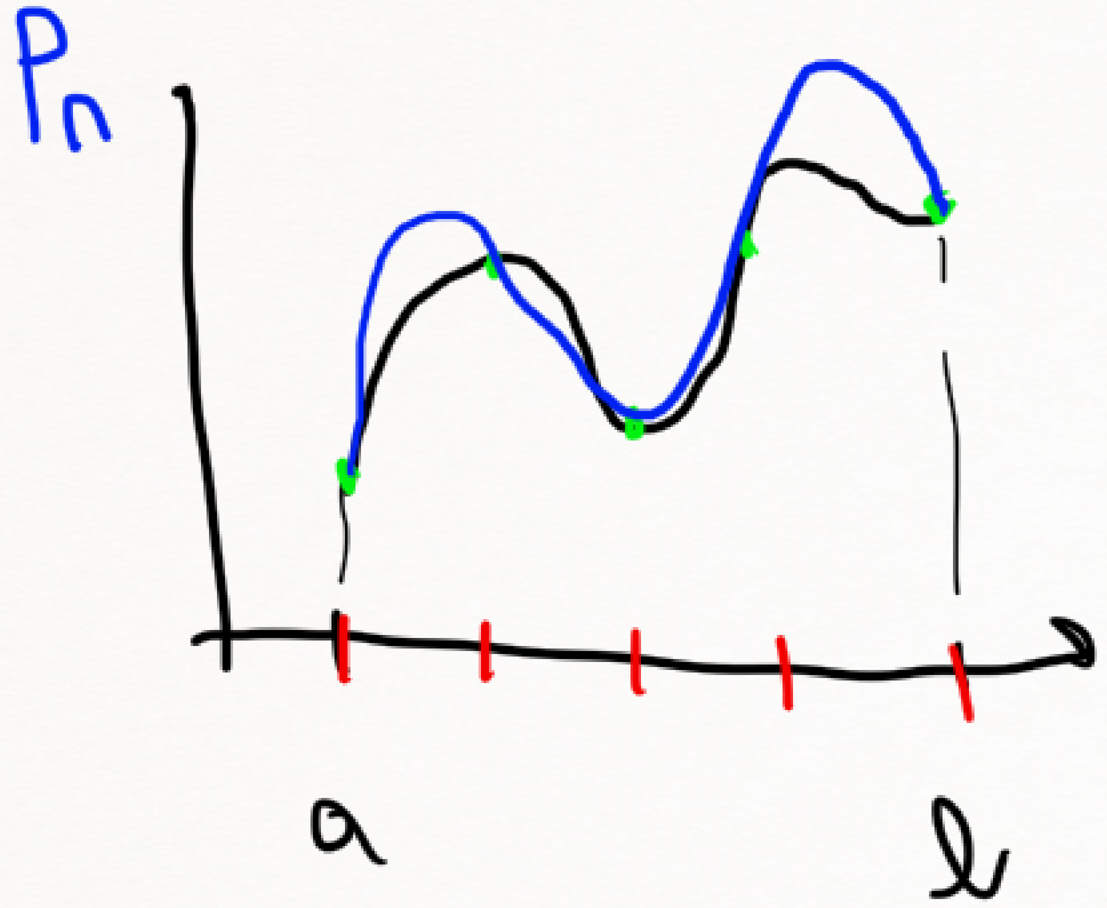
Interpolación a trozos

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\qquad a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$



Antes: hallar un polinomio P_n que interpole todos los puntos

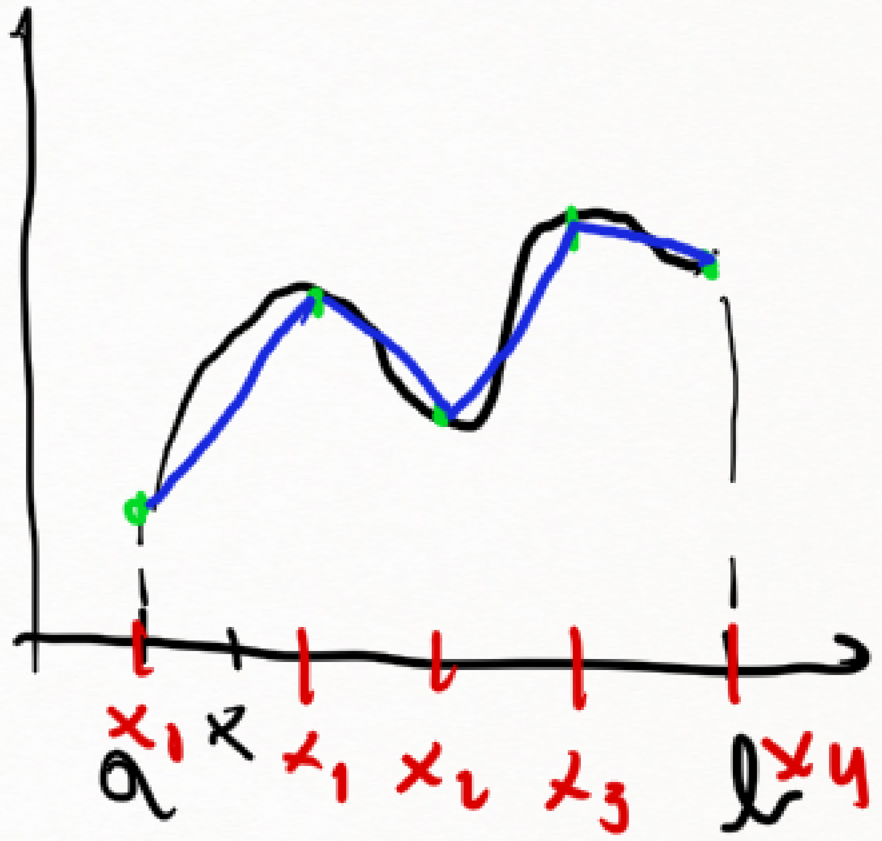


Ahora: en vez de hallar un único polinomio para todo el intervalo $[a,b]$, para cada $[x_i, x_{i+1}]$ hallamos un polinomio que interpole ahí y los pegamos.

Ejemplo lineal a trozos

grado 1

Al pegar polinomios se pueden producir picos (puntos no derivables)



Error

error $e_n(x) = f(x) - p(x)$ $\quad x \in [a,b]$ $\quad$ norma de funciones: $\|g\|_{L^\infty([a,b])} = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$

interpolación

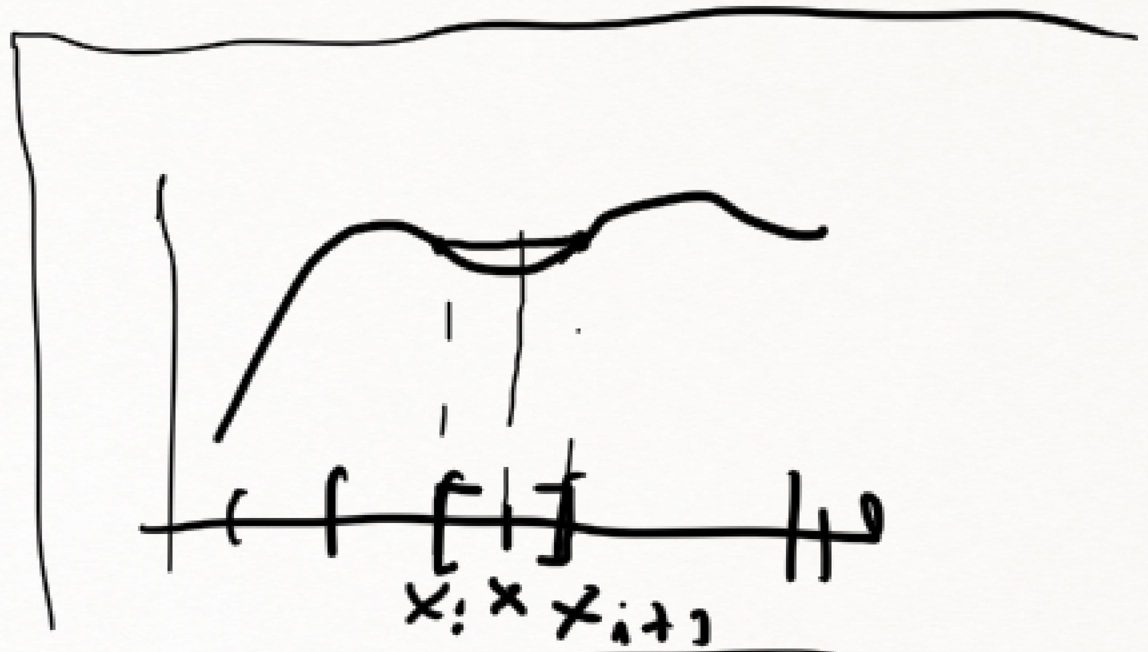
Teo (Error de interpolación): $e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\gamma_x \in (a,b)$

como no sabemos exactamente cuál es γ_x, acotamos por lo máximo que pueda valer

$$|f^{(n+1)}(\gamma_x)| \leq \sup_{y\in[a,b]} |f^{(n+1)}(y)| = \|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}$$

$$\Longrightarrow |e_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}}{(n+1)!}|x-x_0||x-x_1|\cdots|x-x_n|$$



Teo (Error de interpolación lineal a trozos): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\quad a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ $\quad L$ interp. lineal a trozos

$$\Longrightarrow \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \quad |f(x) - L(x)| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_{L^\infty([x_i,x_{i+1}])}}{2!}(x-x_i)(x_{i+1}-x)$$

$|e(x)|$

es como lo de arriba pero con $n=1$, $a = x_i$, $b = x_{i+1}$

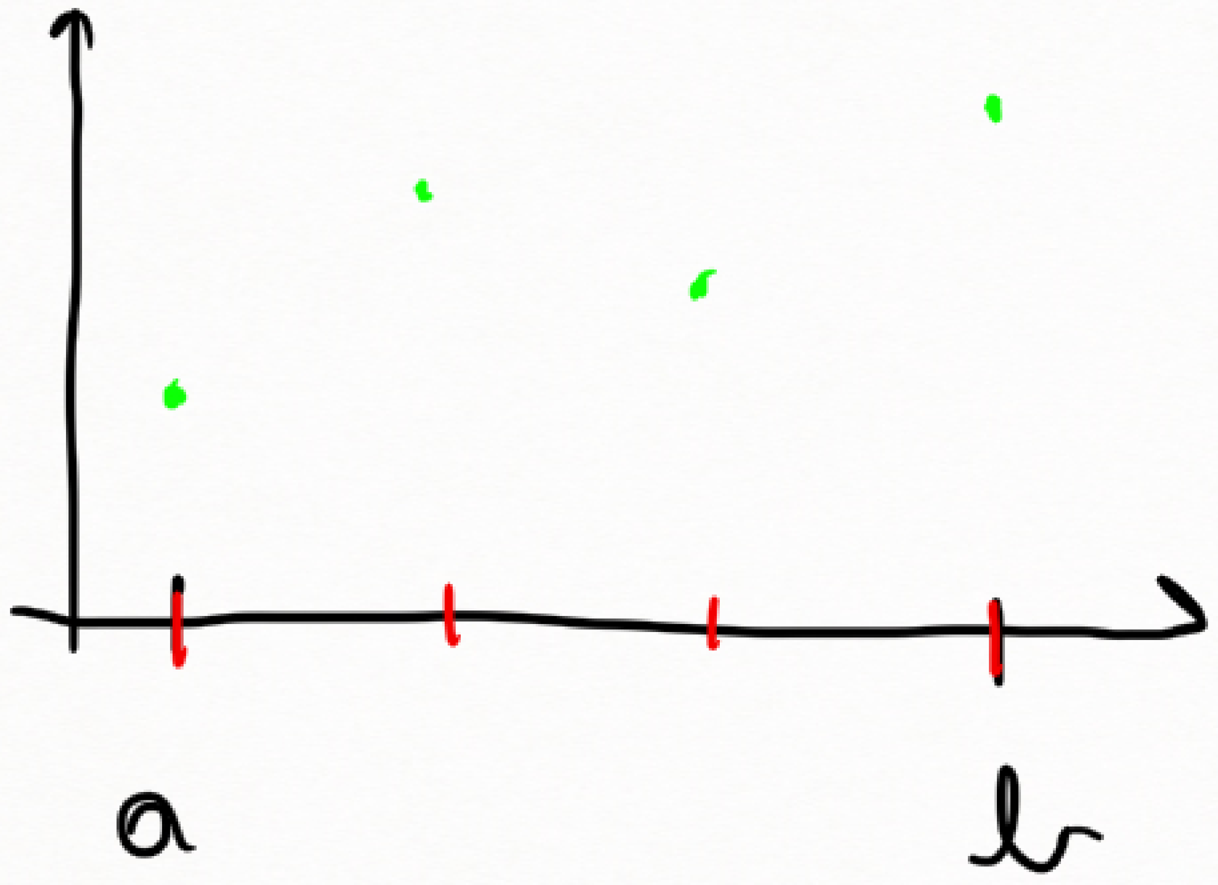
De nuevo $|f(x)-L(x)| \leq \frac{\|f^{(2)}\|_{L^\infty([x_i,x_{i+1}])}}{2}(x-x_i)(x_{i+1}-x)$ $\quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$

Por último: $\|f-L\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\|f^{(2)}\|_{L^\infty([x_i,x_{i+1}])}}{8} \max_{i=0:n-1} (x_{i+1}-x_i)^2$

máximo error

Prop: $(x-x_i)(x_{i+1}-x_i) \leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}$

10 splines cúbicos: interpolación a trozos con polinomios de grado 3.



Con polinomios de grado 1 (lineal) alcanza conocer cuanto vale en los dos extremos (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3)

Con grado 3 (cúbico) no alcanza.
Tenemos 4 grados de libertad (coeficientes) entonces necesitamos 4 ecuaciones para determinarlo
Se agregan las derivadas en los puntos:
(x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3), $\underbrace{(d_0, d_1, d_2, d_3)}_{\text{derivadas}}$

El polinomio en $[x_i, x_{i+1}]$ se determina por:

$$p(x_i) = y_i \quad p(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

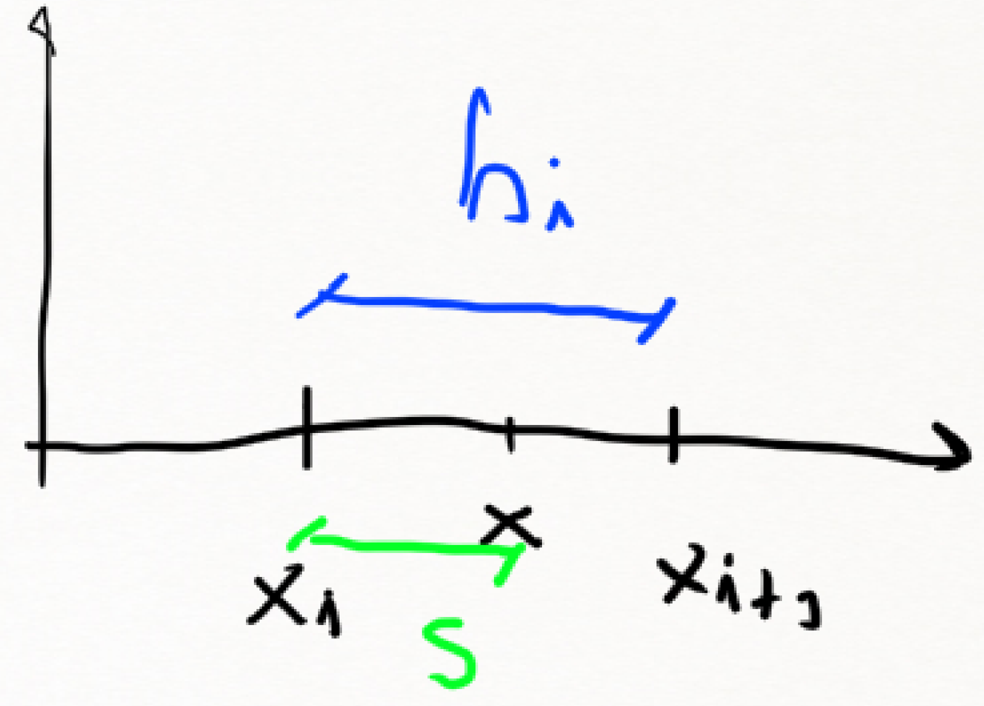
$$p'(x_i) = d_i \quad p'(x_{i+1}) = d_{i+1}$$

$$p(x_i) = y_i \qquad p(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad p'(x_i) = d_i \qquad p'(x_{i+1}) = d_{i+1}$$

determina un único pol. de grado 3 que es el siguiente:

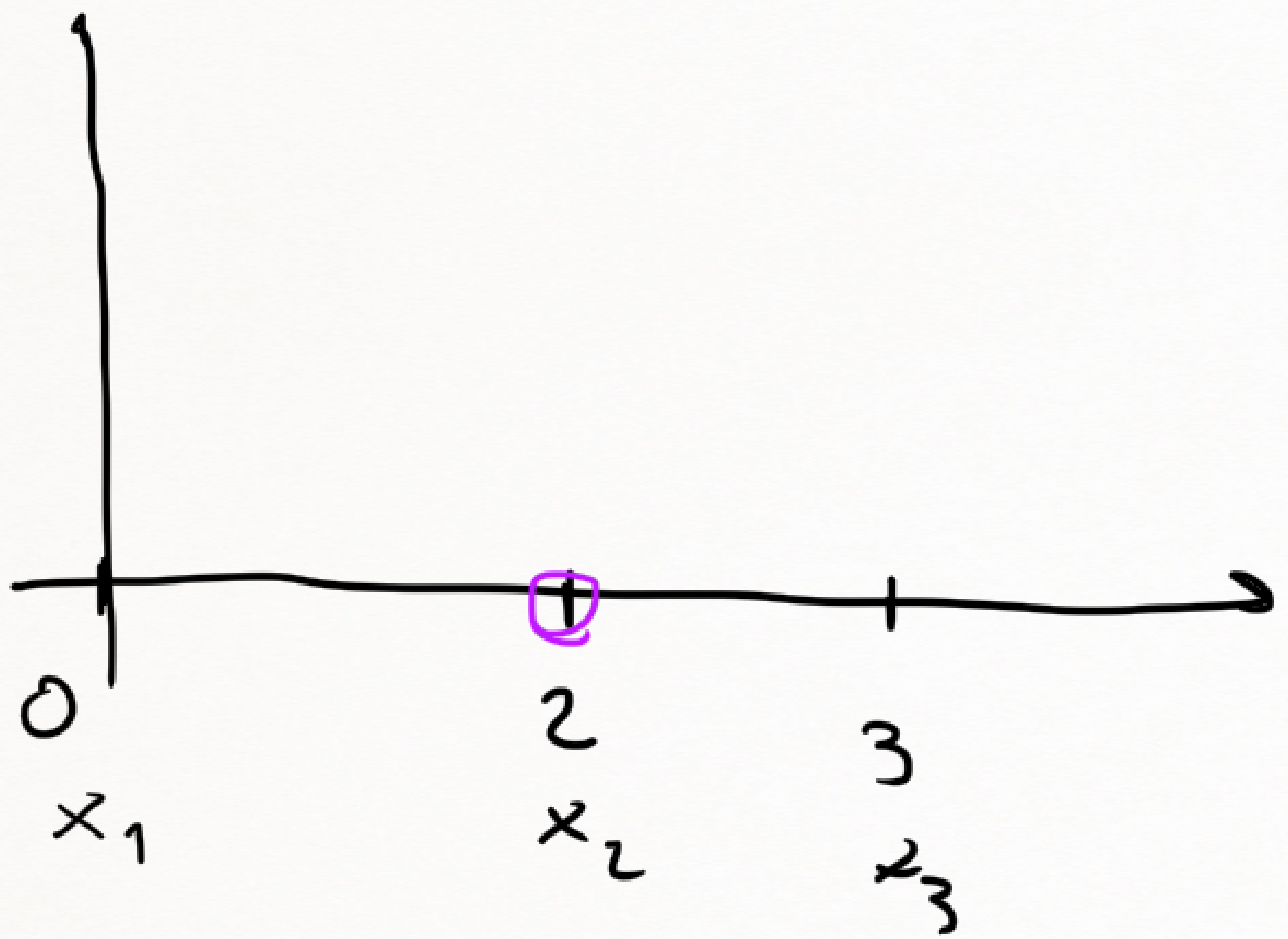
$$p(x) = \underbrace{\left(\frac{3h_i s^2 - 2s^3}{h_i^3}\right)}_{P_0(x)} y_{i+1} + \underbrace{\left(\frac{h_i^3 - 3h_i s^2 + 2s^3}{h_i^3}\right)}_{P_1(x)} y_i + \underbrace{\frac{s^2(s-h_i)}{h_i^2}}_{P_2(x)} d_{i+1} + \underbrace{\frac{s(s-h_i)^2}{h_i^2}}_{P_3(x)} d_i \qquad \left(\begin{array}{l} h_i = x_{i+1} - x_i \\ s = x - x_i \end{array}\right)$$

$P_0(x_i) = 0$	$P_1(x_i) = 1$	$P_2(x_i) = 0$	$P_3(x_i) = 0$
$P_0(x_{i+1}) = 1$	$P_1(x_{i+1}) = 0$	$P_2(x_{i+1}) = 0$	$P_3(x_{i+1}) = 0$
$P_0'(x_i) = 0$	$P_1'(x_i) = 0$	$P_2'(x_i) = 0$	$P_3'(x_i) = 1$
$P_0'(x_{i+1}) = 0$	$P_1'(x_{i+1}) = 0$	$P_2'(x_{i+1}) = 1$	$P_3'(x_{i+1}) = 0$



(10) $f:[0,3] \to \mathbb{R}$ $\quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

- $f(0) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 2 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 2$
- f, f' y f'' deben ser continuas en $[0,3]$
- $f'(0^+) = 0 \quad f'(3^-) = 0$



$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 2$

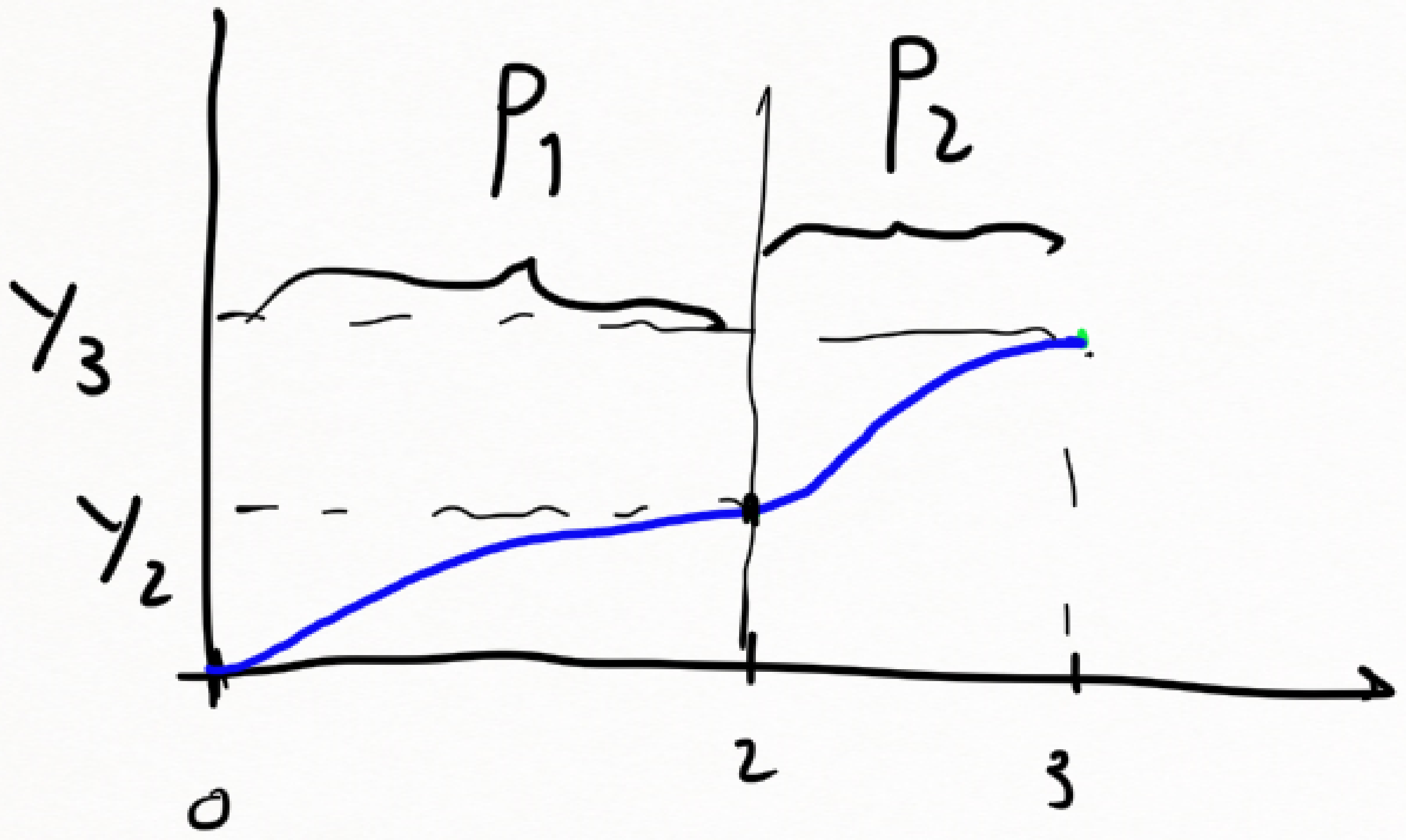
nos falta $\quad d_1 = f'(0^+) \quad d_2 = f'(2) \quad d_3 = f'(3)$

por el tercer punto, $\quad d_1 = 0 \quad d_3 = 0$

La única incógnita que nos queda para poder determinar los polinomios es d_2

La ecuación con la que vamos a determinar d_2 proviene de que f'' sea continua en 2.

Al definir los polinomios con los valores y las derivadas en los extremos, siempre f, f' son continuas.



Definimos los polinomios de grado 3 con y_1, y_2, y_3 y d_1, d_2, d_3

Las ecuaciones con las que definimos P_1 y P_2 son:

$P_1(0) = y_1$ $\quad$ $P_2(2) = y_2$

$P_1(2) = y_2$ $\quad$ $P_2(3) = y_3$

$P_1'(0) = d_1$ $\quad$ $P_2'(2) = d_2$

$P_1'(2) = d_2$ $\quad$ $P_2'(3) = d_3$

Adentro de los intervalos $(0,2)$ y $(2,3)$ nunca va a haber ningún problema.

El punto en el que podría romperse la continuidad de F, F' o F'' es $x=2$.

En base a las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} P_1(2) = y_2 \\ P_2(2) = y_2 \end{array}\right| \Rightarrow F \text{ es cont. en } 2 \qquad \left.\begin{array}{l} P_1'(2) = d_2 \\ P_2'(2) = d_2 \end{array}\right| \Rightarrow F' \text{ también es cont. en } 2.$$

Lo único que falta es F'' que sea cont. en 2.

Por cuentas que están en las notas, la ecuación de la continuidad de P'' en los nodos intermedios es:

$$\frac{6\delta_j - 2d_{j+1} - 4d_j}{h_j} = \frac{-6\delta_{j-1} + 2d_j + 4d_{j-1}}{h_{j-1}}$$ ecuación para cada nodo intermedio.

En nuestro caso tenemos un solo nodo intermedio $x_2 = 2$ y entonces una sola ec.

$j=2$:
$$\frac{6\overset{1}{\delta_2} - \cancel{2d_3} - 4d_2}{\overset{1}{h_2}} = \frac{-6\overset{1/2}{\delta_1} + 2d_2 + \cancel{4d_1}}{\overset{2}{h_1}}$$

$d_1 = d_3 = 0$ $\quad d_2$ incógnita

$h_1 = x_2 - x_1 = 2 - 0 = 2$

$h_2 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$

$\delta_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} = 1$

$\delta_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} = \dfrac{1}{2}$

$$6 - 4d_2 = \frac{-3 + 2d_2}{2} \iff 12 - 8d_2 = -3 + 2d_2$$
$$\iff 15 = 10d_2 \iff \boxed{d_2 = \frac{3}{2}}$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = 2$

$d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{3}{2} \quad d_3 = 0$

con esos datos podemos hallar los dos polinomios usando la fórmula

para P_1 $\quad y_i \leftarrow y_1 \quad y_{i+1} \leftarrow y_2 \quad d_i \leftarrow d_1 \quad d_{i+1} \leftarrow d_2$

P_2 $\quad y_i \leftarrow y_2 \quad y_{i+1} \leftarrow y_3 \quad d_i \leftarrow d_2 \quad d_{i+1} \leftarrow d_3$