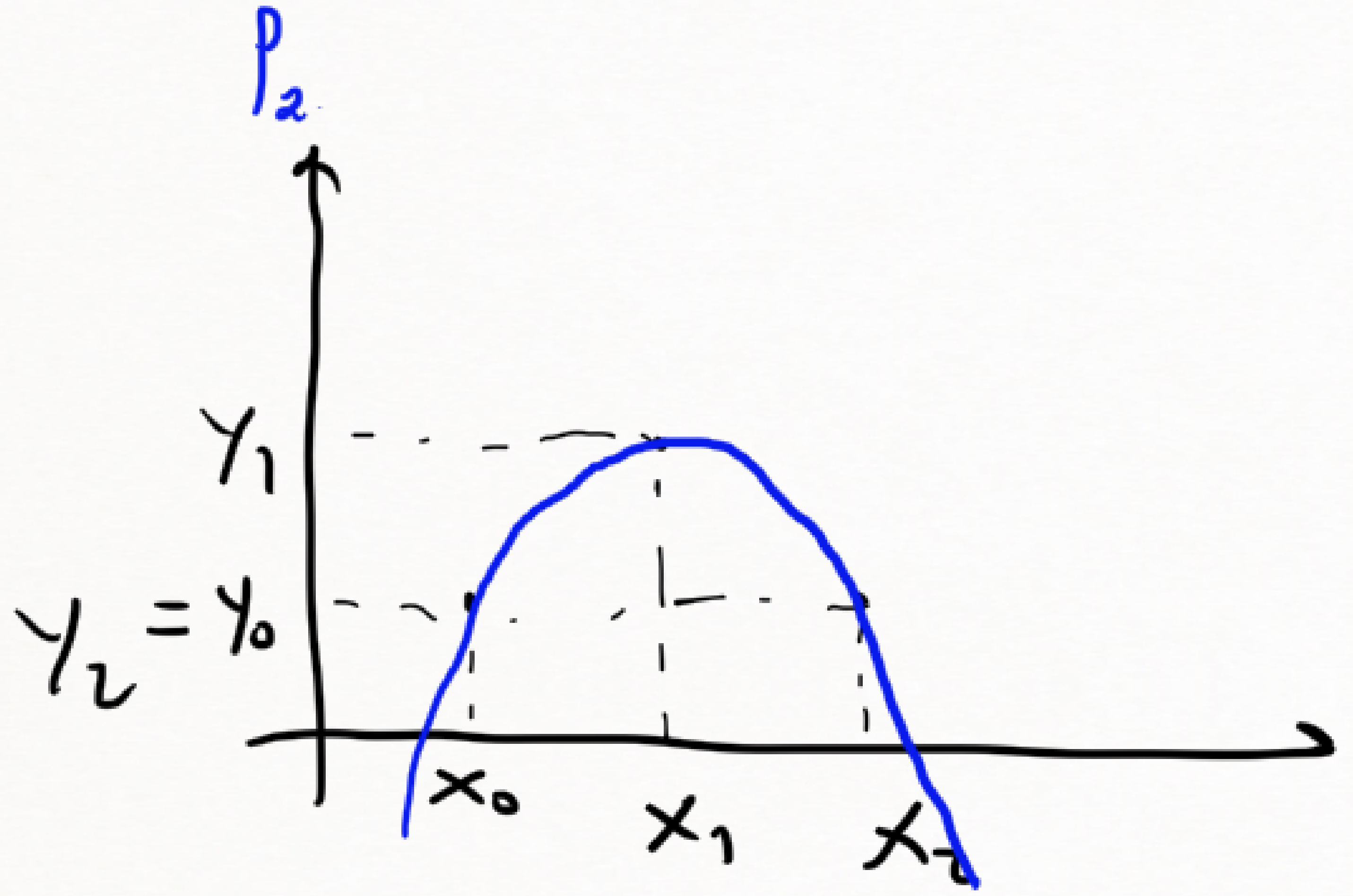
Interpolación "de puntos": $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

dados $n+1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0:n}$ existe un único polinomio p_n de grado $\leq n$ que pasa por todos los puntos $(\forall i = 1:n \quad p_n(x_i) = y_i)$ (las x_i no se pueden repetir)



Vimos 3 métodos distintos para hallar el polinomio:

Vandermonde, Lagrange, Newton

Interpolación de Funciones

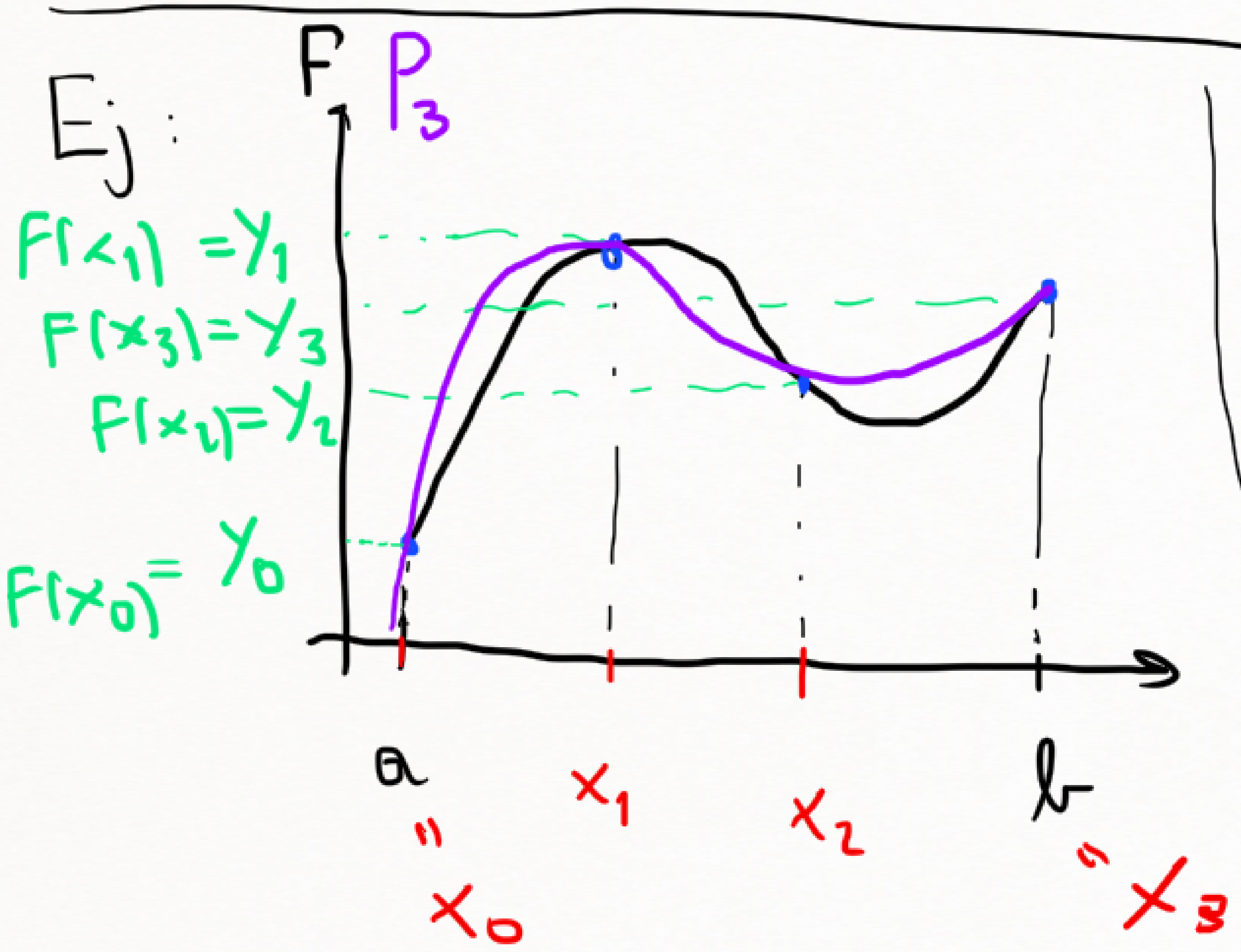
Antes teníamos $(x_i, y_i)_{i=1,n}$. $\longrightarrow$ Ahora $\{x_i\}_{i=1,n}$ y $F: [a,b] \to \mathbb{R}$

vamos a hacer $y_i = F(x_i)$

y hallar el poli interpolante.

$(x_0, F(x_0)), (x_1, F(x_1)), \dots, (x_n, F(x_n))$

Ej:



¿Qué pasa si aumentamos la cantidad de puntos? ¿El polinomio se aproxima a la función F?

Depende de la función F.

en los x_i, F y P_3 coinciden

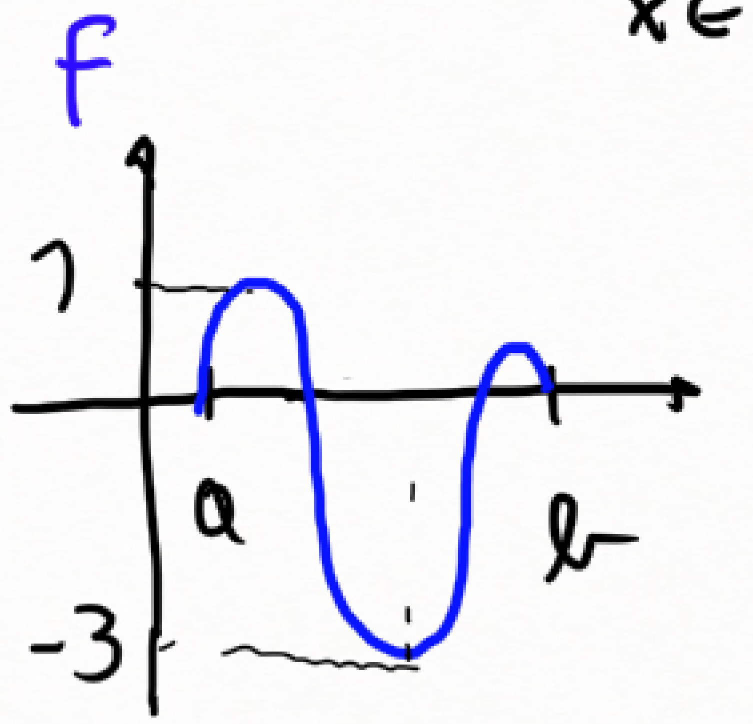
$F(x_i) = P_3(x_i)$. Entre medio no tienen por qué coincidir.

Error de interpolación

Norma de Funciones: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\qquad \|f\|_{L^\infty([a,b])} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

$$\left(\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1:n} |x_i|\right)$$

Ejemplo:



$\|f\|_{L^\infty([a,b])} = 3$

- $e_n : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $e_n(x) = f(x) - p_n(x)$

$\|e_n\|_{L^\infty([a,b])} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$ es lo máximo que se alejan p_n y la función f a $[a,b]$

Nos gustaría que $\|e_n\|_{L^\infty([a,b])}$ sea chico

Recordatorio de Taylor con resto de Lagrange

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)\ \text{pol Taylor}} + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \in (a,x)$$

$$\Rightarrow f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

"Fórmula para el error al aproximar por Taylor"

Teo: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ C^{n+1}, $x_0<x_1<\dots<x_n$ puntos en $[a,b]$ y P_n polinomio interpolante a f por esos puntos.

$$\Rightarrow e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}\overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}^{w_n(x)}$$

$(x\in[a,b])$ con $\gamma_x\in(a,b)$

- Nunca sabemos exactamente cual es γ_x. Solo sabemos que $\gamma_x\in(a,b)$. Lo que se hace es tomar el peor caso, o sea el máximo valor que pueda tener $f^{(n+1)}$

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!}w_n(x)$$

$$e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma_x)}{(n+1)!} w_n(x)$$

$$|e_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|w_n(x)|\,|f^{(n+1)}(\gamma_x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|w_n(x)| \overbrace{\sup_{z\in[a,b]} |f^{(n+1)}(z)|}^{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}} = \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}}{(n+1)!}|w_n(x)|$$

solo sabemos $\in (a,b)$

$$\Longrightarrow |e_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}}{(n+1)!}|w_n(x)|$$

si queremos acotar el máximo posible error,

$$\|e_n\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty([a,b])}}{(n+1)!}\|w_n\|_{L^\infty([a,b])}$$

Método de Lagrange

pol de base $L_n^k(t)$ con $k = 0, \ldots, n$ $\rightarrow L_n^k(t) = \dfrac{\prod_{i\neq k}(t-x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)} = \prod_{i\neq k}\left(\dfrac{t-x_i}{x_k-x_i}\right)$

$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

$$L_n^0(t) = \frac{(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_n^1(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_2)\cdots(t-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$\vdots$

$$L_n^n(t) = \;-\;-\;-$$

Polinomio interpolante:

$$L(t) = y_0 L_n^0(t) + y_1 L_n^1(t) + \cdots + y_n L_n^n(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i L_n^i(t)$$

LBase $(x, k, t) \leftarrow L_n^k(t)$

LPol $(x, y, t) \leftarrow L(t)$ polinomio interpol. evaluado en t