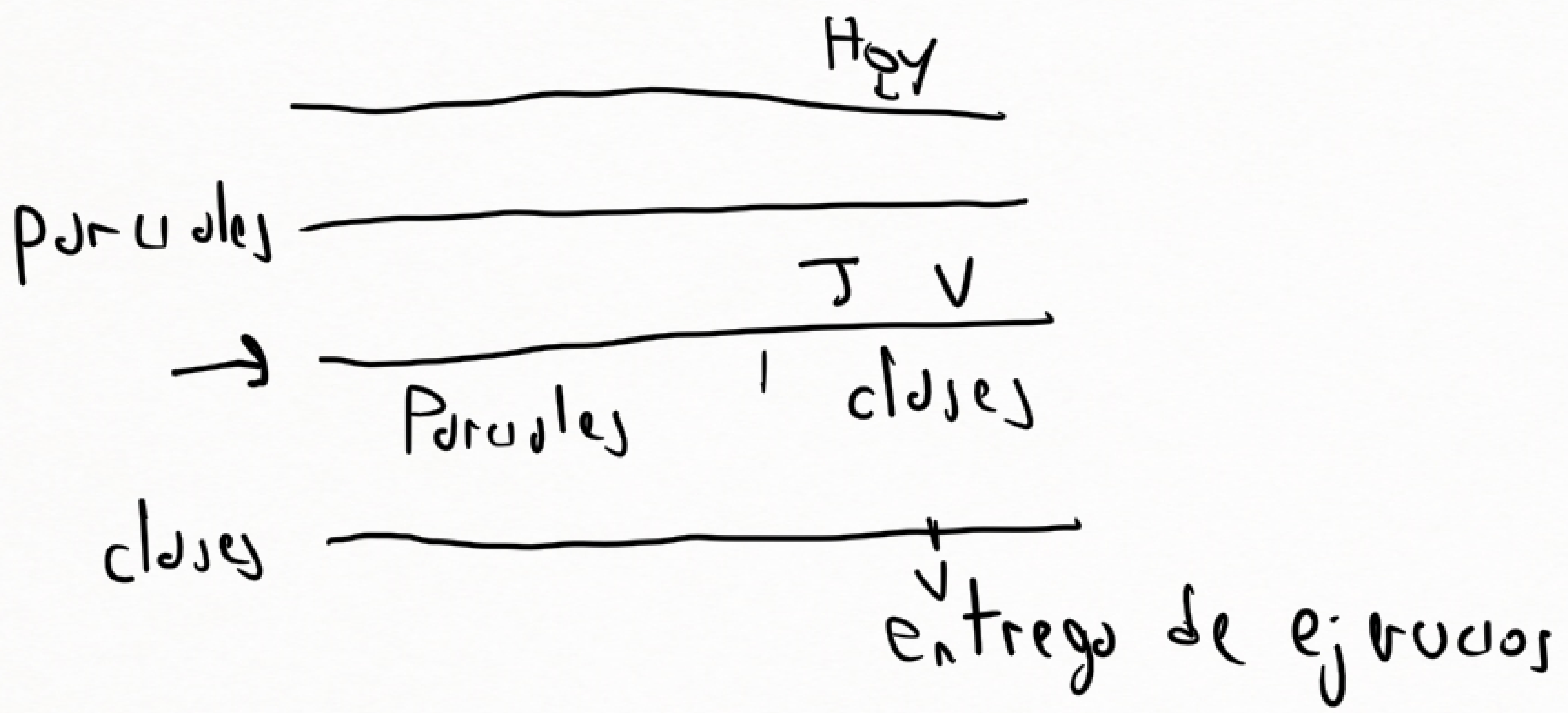

Hoy
parciales
J V
Parciales
clases
clases
entrega de ejercicios

(MIM) $x^{k+1} = Qx^k + t \quad Q \in M_n(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}^n$ Fijos

Teo: un MIM es convergente para todo $x^0 \in \mathbb{R}^n \iff \rho(Q) < 1$

módulo (complejos)

$\iff \forall \lambda_i$ vap de Q, $|\lambda_i| < 1$

Método SOR: $w \in (0,2)$ $\quad Q_{SOR} = (D - wE)^{-1}((1-w)D + wF) \quad t_{SOR} = w(D-wE)^{-1}b \quad (Ax=b)$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A = \underset{\text{diagonal}}{D} - \underset{\substack{\text{triangular} \\ \text{inferior}}}{E} - \underset{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}}{F}$$

a) Probar $|Q_{SOR}| = (1-w)^n$

$$|Q_{SOR}| = \frac{|(1-w)D + wF|}{|D - wE|}$$

$$= \frac{(1-w)^n \cancel{d_1}\cancel{d_2} \cdots \cancel{d_n}}{\cancel{d_1}\cancel{d_2} \cdots \cancel{d_n}} = (1-w)^n$$

$$(1-w)D + wF = \begin{pmatrix} (1-w)d_1 & & wF \\ 0 & (1-w)d_2 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \ (1-w)d_n \end{pmatrix}$$

$$|(1-w)D + wF| = (1-w)^n d_1 d_2 \cdots d_n$$

$$D - wE = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & & \vdots \\ -wE & & \ddots & 0 \\ & & & d_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} |D - wE| \\ \shortparallel \\ d_1 d_2 \cdots d_n \end{array}$$

Hay que probar que si $w \notin (0,2)$ el método SOR diverge. Por el teorema, hay que probar que $\rho(Q_{SOR}) \geq 1$ si $w \notin (0,2)$

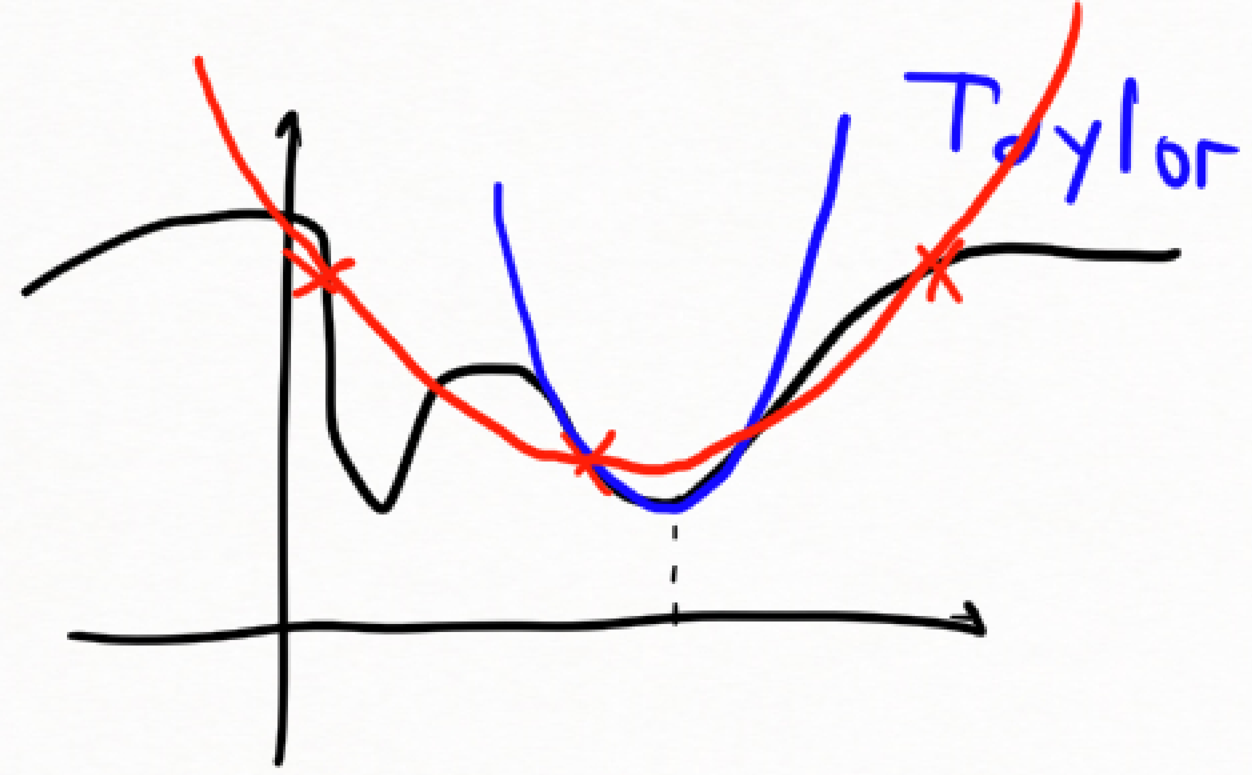
Supongamos que $w \notin (0,2)$ $\quad |\det(Q)| = |1-w|^n \geq 1$ tanto si $w \leq 0$ como si $w \geq 2$

Usamos la forma de Jordan de Q_{SOR}. Sean $\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}_{\text{se pueden repetir}} \in \mathbb{C}$ los vaps de Q_{SOR}

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\det(Q_{SOR})}{\det(J)} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\Rightarrow 1 \leq |\det(Q_{SOR})| = |\det(J)| = |\lambda_1||\lambda_2| \cdots |\lambda_n| \quad \Rightarrow |\lambda_1||\lambda_2| \cdots |\lambda_n| \geq 1$$

$\Rightarrow \underbrace{\text{algún } \lambda_i \text{ tiene } |\lambda_i| \geq 1}_{\rho(Q_{SOR}) \geq 1}$, sino si todos fueran <1, el producto tb sería <1.



~~(1,2), (1,3)~~

Prop: $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,n}$ n+1 puntos que queremos interpolar $\quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$

$\Rightarrow$ existe un único $P_n(x)$ polinomio de grado $\leq n$ que interpola los n+1 puntos:

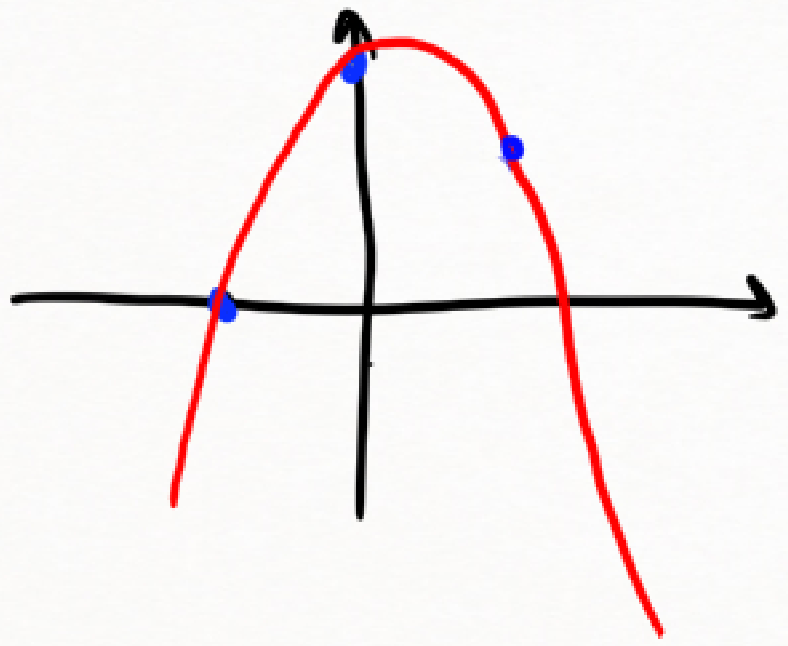
$$P_n(x_0) = y_0 \qquad P_n(x_1) = y_1 \qquad — \qquad P_n(x_n) = y_n$$

vemos 3 formas de hallarlo:
- Vandermonde "(sistema de ecuaciones)"
- Lagrange "(base canónica)"
- Newton "(algoritmo recursivo)"

dan el mismo polinomio escrito de distintas formas: Ej x^2-1 ; $(x+1)(x-1)$

① $(-1,0),\ (0,3),\ (1,2) \rightarrow P_2$ polinomio de grado 2.

$$P_2(-1)=0 \qquad P_2(0)=3 \qquad P_2(1)=2$$



Vandermonde: $P_2(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ incógnitas

$$P_2(-1)=0 \rightarrow c_2 - c_1 + c_0 = 0 \rightarrow c_2 - c_1 = -3$$

$$P_2(0)=3 \rightarrow \boxed{c_0 = 3}$$

$$+$$

$$P_2(1)=2 \rightarrow c_2 + c_1 + c_0 = 2 \rightarrow c_2 + c_1 = -1$$

$$2c_2 = -4 \Rightarrow \boxed{c_2 = -2}$$

$$c_2 + c_1 = -1 \rightarrow -2 + c_1 = -1 \rightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = -2x^2 + x + 3}$$

$(-1,0)\quad(0,3)\quad(1,2)$

Lagrange:

se usa una especie de base canónica de polinomios con respecto a la coordenada x de los puntos. $x_0=-1 \quad x_1=0 \quad x_2=1$

3 polinomios de base: $L_2^0(x), L_2^1(x), L_2^2(x)$

cumplen lo siguiente:

$$L_2^0(-1)=1 \qquad L_2^1(-1)=0 \qquad L_2^2(-1)=0$$

$$L_2^0(0)=0 \qquad L_2^1(0)=1 \qquad L_2^2(0)=0$$

$$L_2^0(1)=0 \qquad L_2^1(1)=0 \qquad L_2^2(1)=1$$

$$L_2^0(x)=\frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_2^1(x)=-(x+1)(x-1)$$

$$L_2^2(x)=\frac{(x+1)x}{2}$$

$$P_2(x)=0L_2^0(x)+3L_2^1(x)+2L_2^2(x)$$

$$P_2(-1)=0\underbrace{L_2^0(-1)}_{=1}+3\underbrace{L_2^1(-1)}_{=0}+2\underbrace{L_2^2(-1)}_{=0}=0$$

$$P_2(0)=0\underbrace{L_2^0(0)}_{=0}+3\underbrace{L_2^1(0)}_{=1}+2\underbrace{L_2^2(0)}_{=0}=3$$

$$P_2(1)=0\underbrace{L_2^0(1)}_{=0}+3\underbrace{L_2^1(1)}_{=0}+2\underbrace{L_2^2(1)}_{=1}=2$$

$$P_2(x)=3\left(-(x+1)(x-1)\right)+2\frac{(x+1)x}{2}$$

$$=\boxed{-3(x+1)(x-1)+(x+1)x}$$

$(-1,0) \quad (0,3) \quad (1,2)$

Newton: método recursivo

P_0 que interpola $(-1,0)$

→ P_1 que interpola $(-1,0), (0,3)$

→ P_2 que interpola $(-1,0), (0,3), (1,2)$

P_0: debe interpolar $(-1,0)$.

$$P_0(x) = 0.$$

cumple $P_0(-1) = 0$ ✓

P_1: debe interpolar $(-1,0)$ y $(0,3)$

$$P_1(x) = P_0(x) + \underbrace{q(x)}_{\text{hallarlo}}$$

$$P_1(-1) = 0 \to \underbrace{P_0(-1)}_{0} + q(-1) = 0 \Rightarrow q(-1) = 0$$

$$P_1(0) = 3 \to \underbrace{P_0(0)}_{0} + q(0) = 3 \Rightarrow q(0) = 3$$

$$q(x) = 3(x+1) \qquad \Rightarrow P_1(x) = 3(x+1)$$

P_2: debe interpolar $(-1,0), (0,3)$ y $(1,2)$ $\quad P_2(x) = P_1(x) + q(x)$

$$P_2(-1) = \underbrace{P_1(-1)}_{=0} + q(-1) = 0$$

P_1 interpola $(-1,0)$ $\Rightarrow q(-1) = 0$

$$P_2(0) = \underbrace{P_1(0)}_{=3} + q(0) = 3$$

P_1 interpola $(0,3)$ $\Rightarrow q(0) = 0$

$$P_2(1) = \underbrace{P_1(1)}_{=6} + q(1) = 2 \Rightarrow q(1) = -4$$

$$q(x) = -2(x+1)x$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x) = 3(x+1) - 2(x+1)x}$$