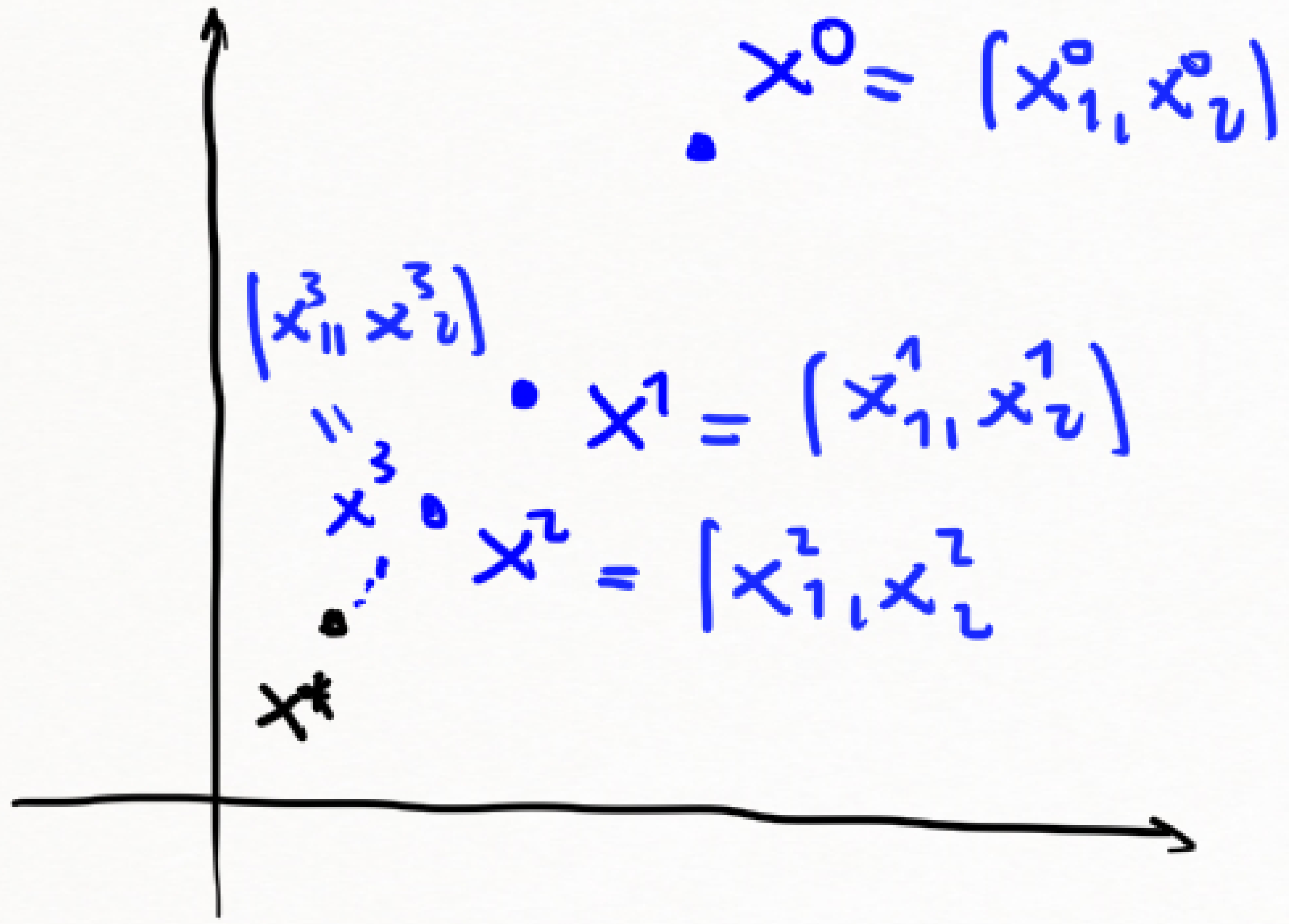
$Ax=b$

Métodos iterativos

Construir una sucesión de vectores $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ $x^k\in\mathbb{R}^n$ que converja a la solución exacta. $Ax^*=b$ $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$

$\mathbb{R}^2$



$x^k\in\mathbb{R}^n$ $x^k=(x^k_1, x^k_2, \dots, x^k_n)$

$x^0\to x^1\to x^2\to \cdots \to x^k\to x^{k+1}$

Los métodos que vimos antes son $O(n^3)$

En estos métodos, avanzar en la sucesión $x^k\to x^{k+1}$ suele ser $O(n^2)$

Ejemplo: $n=1000$

Con los métodos anteriores necesitaríamos $\sim \overbrace{1000.000.000}^{n^3}$ cuentas

Con métodos indirectos, si con 40 iteraciones alcanza $\sim 40\times \overbrace{1000000}^{n^2}$ cuentas

40.000.000

Jacobi y Gauss-Seidel

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} \qquad D, E, F \in M_n(\mathbb{R}) \qquad A = D - E - F$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queremos llegar a una Fórmula que nos sirva para calcular x^{k+1} en Función del x^k

$$Ax = b \iff (D-E-F)x = b$$
$$\iff Dx = (E+F)x + b$$
$$\iff x = D^{-1}(E+F)x + D^{-1}b$$

Jacobi: $\boxed{x^{k+1} = D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b}$

$$Ax = b \iff (D-E-F)x = b$$
$$\iff (D-E)x = Fx + b$$
$$\iff x = (D-E)^{-1}Fx + (D-E)^{-1}b$$

Gauss-Seidel $\boxed{x^{k+1} = (D-E)^{-1}Fx^k + (D-E)^{-1}b}$

Jacobi y GS son casos particulares de MIM

(MIM) $\begin{cases} x^{k+1} = Qx^k + t \\ x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ $Q \in M_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^n$ Fijos. (No dependen de k)

$x^0 \to x^1 = Qx^0 + t \to x^2 = Qx^1 + t \to \cdots$

Jacobi: $x^{k+1} = \underbrace{D^{-1}(E+F)}_{Q_J} x^k + \underbrace{D^{-1}b}_{t_J}$ GS: $x^{k+1} = \underbrace{(D-E)^{-1}F}_{Q_{GS}} x^k + \underbrace{(D-E)^{-1}b}_{t_{GS}}$

Q_J, t_J, Q_{GS}, t_{GS} dependen de A y b.

Def: Decimos que un MIM $x^{k+1} = Qx^k + t$ es consistente $\iff$ $x^* = Qx^* + t$, donde x^* es la solución exacta de $Ax = b$

o sea, x^* es un punto fijo de la iteración

$x^k = x^* \Rightarrow x^{k+1} = Qx^* + t = x^*$

$\forall p \geq k \quad x^p = x^*$

- Jacobi y GS siempre son métodos consistentes.

Def: $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ vaps.

$$\boxed{\rho(A) := \max_{i=1:n} |\lambda_i|}$$

$z = a + bi \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Teorema: El (MIM) $x^{k+1} = Qx^k + r$ converge para cualquier $x^0 \in \mathbb{R}^n \iff \rho(Q) < 1$

Def: $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonal dominante
- por filas $\iff \forall i = 1:n \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$
- por columnas $\iff \forall j = 1:n \quad |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

Prop: A diagonal dominante (filas o columnas) $\implies$ Jacobi y GS convergen

$\not\Leftarrow$

24 b)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Jacobi converge $\iff \rho(Q_J) < 1$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_J = D^{-1}(E+F)$$

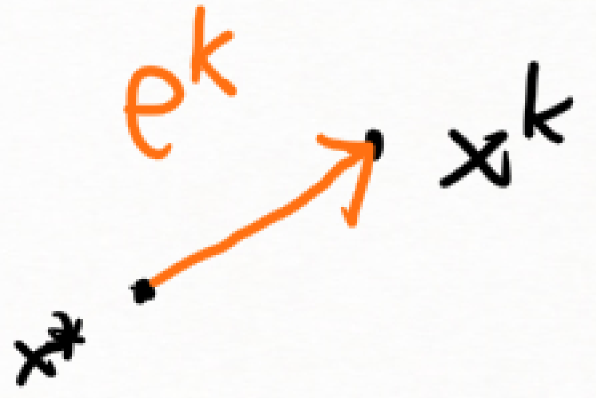
$$D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & 0 \end{pmatrix}} \implies \boxed{Q_J = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ 8/5 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$|Q_J - \lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3/5 \\ 8/5 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{24}{25} = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{\frac{24}{25}}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{24}{25}} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{24}{25}}$$

$$\rho(Q_J) = \max\left\{ \left|\sqrt{\frac{24}{25}}\right|, \left|-\sqrt{\frac{24}{25}}\right| \right\} = \sqrt{\frac{24}{25}} < 1 \overset{\text{Teo}}{\implies} \text{Jacobi converge para cualquier } x^0$$

16 (MIM) $x^{k+1} = Qx^k + t$; x^* sol exacta



$$\boxed{e^k = x^k - x^*}$$

Obs: $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^* \iff e^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

- Asumimos que el MIM es consistente: $x^* = Qx^* + t$

a) Probar $e^k = Q^k e^0$. Primero vamos a probar $e^{k+1} = Qe^k$.

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x^* = Qx^k + \cancel{t} - (Qx^* + \cancel{t}) = Q(x^k - x^*) = Qe^k \Rightarrow e^{k+1} \overset{*}{=} Qe^k$$

$$e^k = Qe^{k-1} = Q(Qe^{k-2}) = Q^2 e^{k-2} = \cdots = Q^k e^0$$

Por inducción:

PB: $k=1$

$e^1 \overset{*}{=} Qe^0$ ✓

PI: (H) $e^k = Q^k e^0$ (T) $e^{k+1} = Q^{k+1} e^0$

Dem: $e^{k+1} \overset{*}{=} Qe^k \underset{(H)}{=} QQ^k e^0 = Q^{k+1} e^0$

Conclusión: $e^k = Q^k e^0$

$$e^{k+1} = Q e^k \qquad e^k = Q^k e^0$$

sup e^0 es vep. asociado al vap $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $Qe^0 = \lambda e^0$

$$e^k = Q^k e^0 = Q^{k-1}(Qe^0) = Q^{k-1}\lambda e^0 = \lambda Q^{k-1} e^0 = \lambda Q^{k-2}(Qe^0) = \lambda Q^{k-2}\lambda e^0 = \lambda^2 Q^{k-2} e^0$$
$$= \cdots = \lambda^k e^0 \qquad \boxed{e^k = \lambda^k e^0}$$

e^0 es vep con $\lambda = 2$

$e^1 = Qe^0 = 2e^0$

$e^2 = Q^2 e^0 = 4e^0$

$e^3 = Q^3 e^0 = 8e^0$

c) supongamos que e^0 es vep asociado a vap λ. Hay 3 casos:

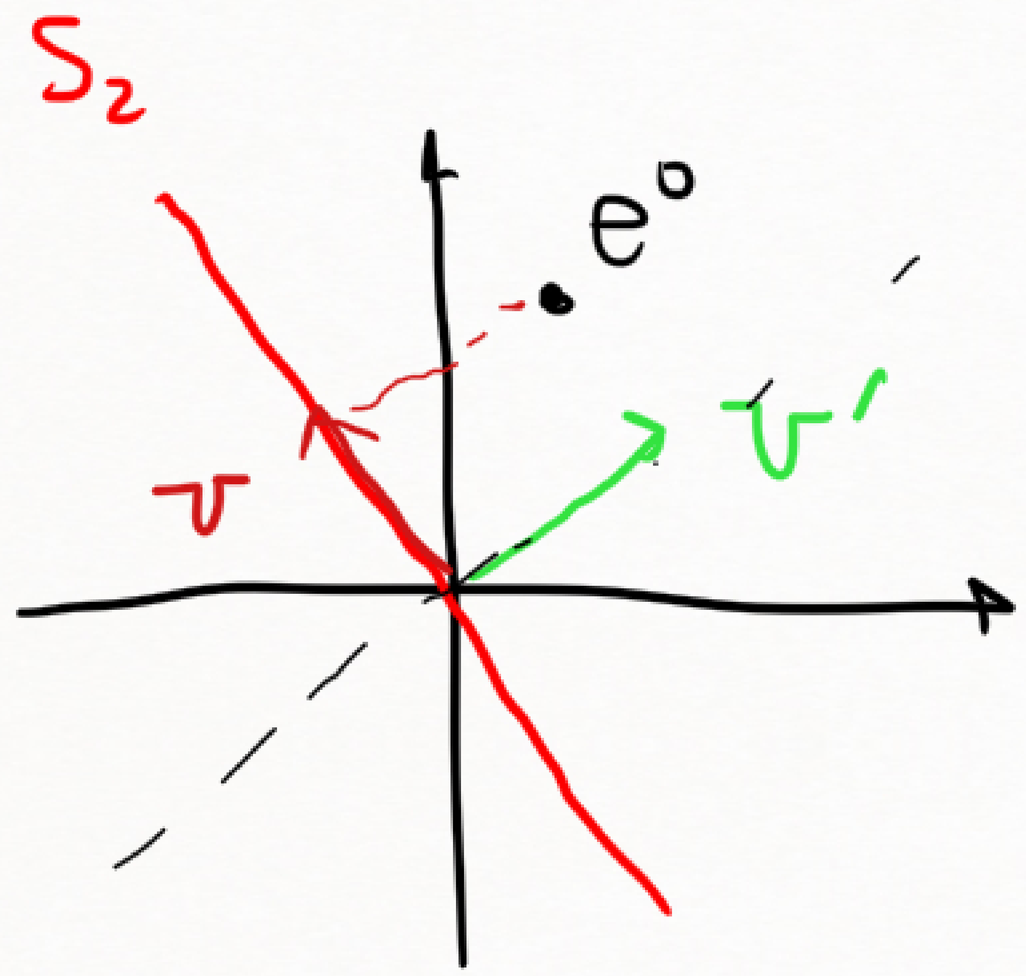
1) $|\lambda| < 1$: $\|e^k\|_v = \|\lambda^k e^0\|_v = \underbrace{|\lambda|}_{<1}^k \|e^0\|_v \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow x^k$ converge a x^*

2) $|\lambda| = 1$: $\|e^k\|_v =$ " $= \underbrace{|\lambda|}_{1}^k \|e^0\|_v = \|e^0\|_v \not\to 0$ $\Rightarrow x^k$ no converge a x^*

3) $|\lambda| > 1$: $\|e^k\|_v =$ " $= \underbrace{|\lambda|}_{>1}^k \|e^0\|_v \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ $\Rightarrow x^k$ diverge

¿Qué pasa si e^0 no es vector propio?

S_2 $\lambda = 2$ valor propio



$$e^0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \in \\ S_2}}{v} + v'$$

$$\begin{aligned} e^k &= Q^k e^0 \\ &= Q^k v + Q^k v' \\ &= \underbrace{2^k v}_{\text{crece exponencialmente}} + Q^k v' \end{aligned}$$