Repaso Modulación Digital

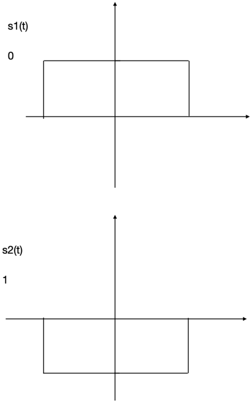
G. Belcredi, P. Belzarena

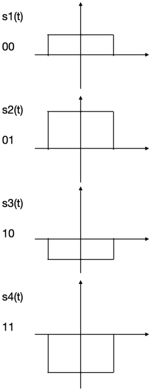
Comunicaciones inalámbricas

2023

Modulación lineal

Formas de onda a transmitir





$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sino.} \end{cases}$$

Formas de onda en la antena o medio físico

- Utilizo un conjunto de formas de onda $\mathcal{S} = \{s_1(t), s_2(t), .., s_M(t)\}$ para transmitir $\log_2(M)$ bits.
- Cuando $s(t) \in \mathcal{L}_2$, es decir $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \tag{1}$$

podemos generar $\mathcal{S}$ con una base de funciones ortonormales $\{\phi_1(t), \phi_2(t), .., \phi_N(t)\}$, con $N \leq M$.

- Para cada $s_j(t)$ existen escalares a_{ij} tales que :

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\phi_i(t) \tag{2}$$

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} s_j(t)\phi_i^*(t)dt \tag{3}$$

Formas de onda en la antena o medio físico

- Utilizo un conjunto de formas de onda $\mathcal{S} = \{s_1(t), s_2(t), .., s_M(t)\}$ para transmitir $\log_2(M)$ bits.
- Cuando $s(t) \in \mathcal{L}_2$, es decir $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \tag{1}$$

podemos generar $\mathcal{S}$ con una base de funciones ortonormales $\{\phi_1(t), \phi_2(t), .., \phi_N(t)\}$, con $N \leq M$.

- Para cada $s_j(t)$ existen escalares a_{ij} tales que :

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\phi_i(t) \tag{2}$$

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} s_j(t)\phi_i^*(t)dt \tag{3}$$

Formas de onda en la antena o medio físico

- Utilizo un conjunto de formas de onda $\mathcal{S} = \{s_1(t), s_2(t), .., s_M(t)\}$ para transmitir $\log_2(M)$ bits.
- Cuando $s(t) \in \mathcal{L}_2$, es decir $s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \tag{1}$$

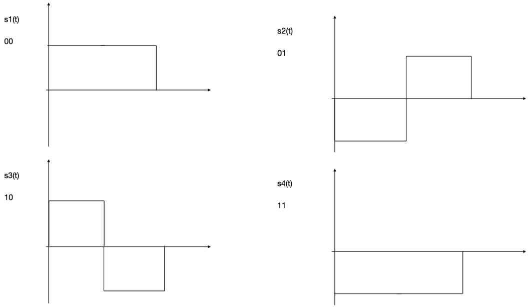
podemos generar $\mathcal{S}$ con una base de funciones ortonormales $\{\phi_1(t), \phi_2(t), .., \phi_N(t)\}$, con $N \leq M$.

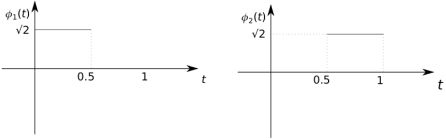
- Para cada $s_j(t)$ existen escalares a_{ij} tales que :

$$s_j(t) = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}\phi_i(t) \tag{2}$$

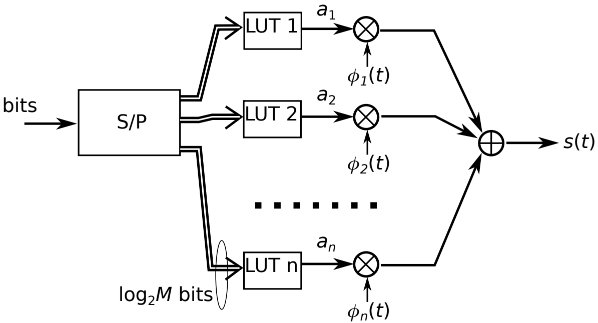
$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} s_j(t)\phi_i^*(t)dt \tag{3}$$

Formas de onda, base y dimensión





Esquema de transmisor



LUT 1	
00	1
01	1
10	-1
11	-1

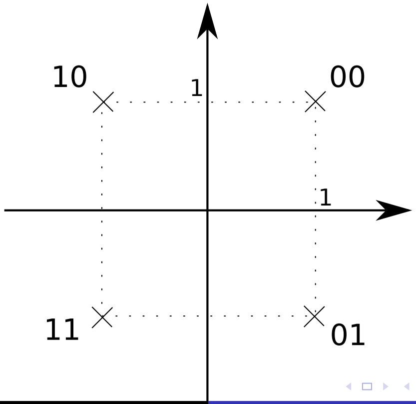
LUT 2	
00	1
01	-1
10	1
11	-1

Espacio de señales

- Correspondencia $s_j(t) \rightarrow \boldsymbol{s}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Nj})$, decimos que $\boldsymbol{s}_j$ es un punto de la constelación.
- La constelación es el conjunto $\{\boldsymbol{s}_{j=1,\ldots,M}\}$, y representa al conjunto de formas de onda.

Espacio de señales

- Correspondencia $s_j(t) \rightarrow \boldsymbol{s}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{Nj})$, decimos que $\boldsymbol{s}_j$ es un punto de la constelación.
- La constelación es el conjunto $\{\boldsymbol{s}_{j=1,\ldots,M}\}$, y representa al conjunto de formas de onda.



¿Qué sucede en el canal con las formas de onda ?

¿Qué podemos hacer en el receptor para recuperar los bits ?

- Lo que recibimos no es una de las formas de onda enviadas y muy probablemente puede no pertenecer al subespacio S.
- ¿Qué hacemos para obtener la forma que más probablemente se envió ?
- ¿Qué criterio usamos para indicar cuál es la forma “más cercana” ?

¿Qué podemos hacer en el receptor para recuperar los bits ?

- Lo que recibimos no es una de las formas de onda enviadas y muy probablemente puede no pertenecer al subespacio S.
- ¿Qué hacemos para obtener la forma que más probablemente se envió ?
- ¿Qué criterio usamos para indicar cuál es la forma “más cercana” ?

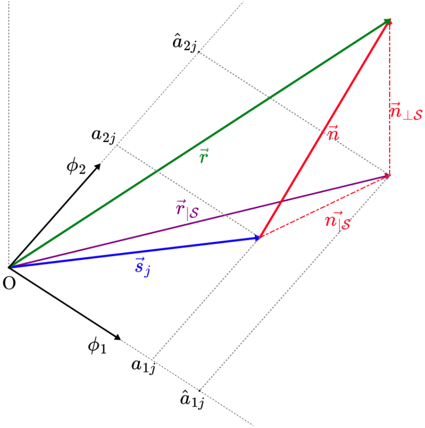
¿Qué podemos hacer en el receptor para recuperar los bits ?

- Lo que recibimos no es una de las formas de onda enviadas y muy probablemente puede no pertenecer al subespacio S.
- ¿Qué hacemos para obtener la forma que más probablemente se envió ?
- ¿Qué criterio usamos para indicar cuál es la forma "más cercana" ?

Señal recibida

A la salida del canal tenemos la señal transmitida más ruido :

$$r(t) = s(t) + n(t) \rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{n}$$



Producto interno y proyección

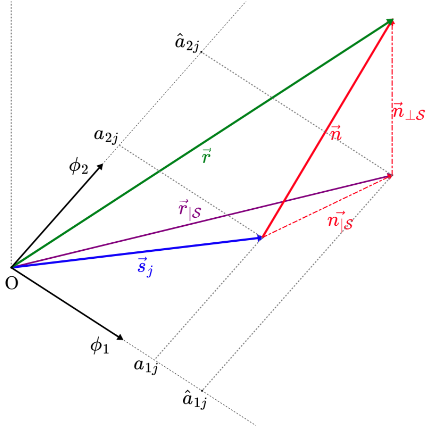
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^* = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \langle u(t), v(t) \rangle$$

$$\boldsymbol{v}_{|\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}_i \rangle \boldsymbol{\phi}_i$$

Señal recibida

A la salida del canal tenemos la señal transmitida más ruido :

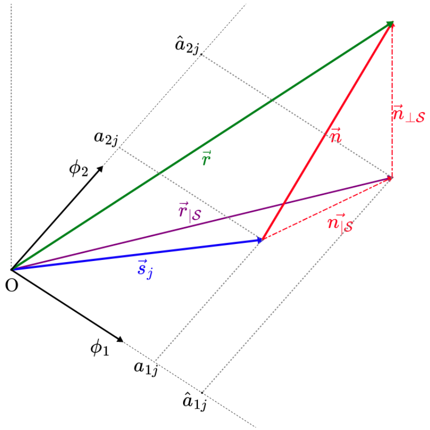
$$r(t) = s(t) + n(t) \rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{n}$$



Producto interno y proyección

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i^* = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \langle u(t), v(t) \rangle$$

$$\boldsymbol{v}_{|\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{N} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\phi}_i \rangle \boldsymbol{\phi}_i$$



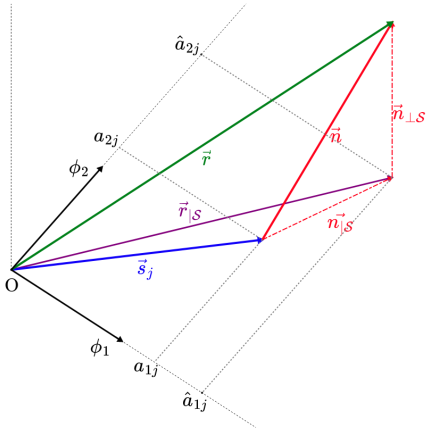
Proyección de $\boldsymbol{r}$ en $\mathcal{S}$

$$\boldsymbol{r}_{|\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i \boldsymbol{\phi}_i$$

$$\hat{a}_i = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\phi_i^*(t)dt$$

Ahora que tengo $\boldsymbol{r}_{|\mathcal{S}}$, ¿cuál fue la forma de onda enviada $s_j(t)$?

Visualización 1



Proyección de $\boldsymbol{r}$ en $\mathcal{S}$

$$\boldsymbol{r}_{|\mathcal{S}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{a}_i \boldsymbol{\phi}_i$$

$$\hat{a}_i = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\phi_i^*(t)dt$$

Ahora que tengo $\boldsymbol{r}_{|\mathcal{S}}$, ¿cuál fue la forma de onda enviada $s_j(t)$?

Visualización 1

Decisión

Señal con diferencia de energía mínima

$$\hat{s}_j(t) = \underset{s_j(t)\in\mathcal{S}}{\arg\min} \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - s_j(t)|^2 dt$$

Es equivalente al siguiente problema de optimización :

Símbolo con menor distancia euclídea

$$\hat{\boldsymbol{s}}_j = \underset{\boldsymbol{s}_j\in\mathcal{S}}{\arg\min} \quad \|\hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}_j\|^2$$

$$\|\hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\hat{a}_i - a_{ij})^2}$$

Decisión

Señal con diferencia de energía mínima

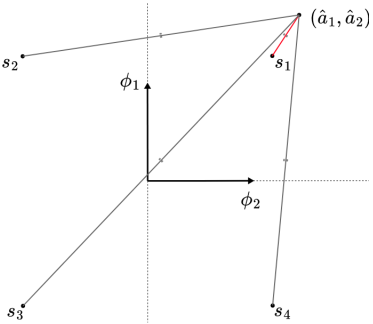
$$\hat{s}_j(t) = \arg\min_{s_j(t)\in\mathcal{S}} \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - s_j(t)|^2 dt$$

Es equivalente al siguiente problema de optimización :

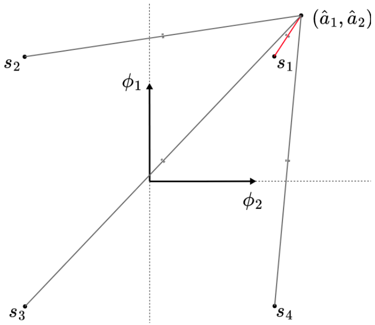
Símbolo con menor distancia euclídea

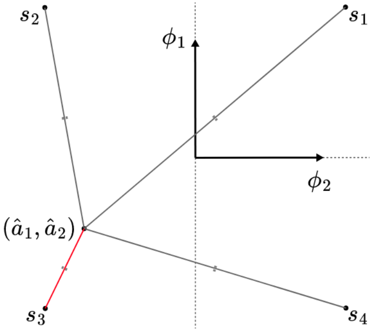
$$\hat{\boldsymbol{s}}_j = \arg\min_{\boldsymbol{s}_j\in\mathcal{S}} \|\hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}_j\|^2$$

$$\|\hat{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\hat{a}_i - a_{ij})^2}$$



Visualización 2





Visualización 2

Esquema de un receptor

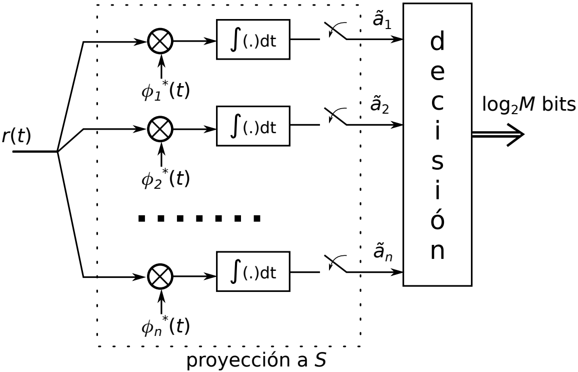


Figure – El diagrama del receptor.

¿Algún problemas práctico ?

Esquema de un receptor

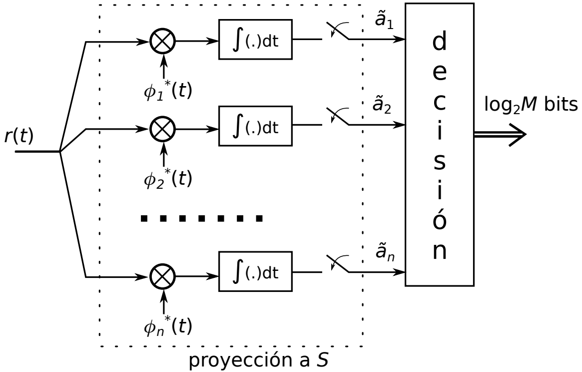


Figure – El diagrama del receptor.

¿Algún problemas práctico ?

Esquema de un receptor

- Imaginemos entonces que cada función $\phi_i(t)$ tiene soporte en $t = [0, T_s)$.
- Pasemos $r(t)$ por un filtro con respuesta a impulso $h(t) = \phi_i^*(-t)$. Calculemos $x(t) = r(t) * h(t)$.

Figure – El receptor implementado con un filtro apareado.

Esquema de un receptor

- Imaginemos entonces que cada función $\phi_i(t)$ tiene soporte en $t = [0, T_s)$.
- Pasemos $r(t)$ por un filtro con respuesta a impulso $h(t) = \phi_i^*(-t)$. Calculemos $x(t) = r(t) * h(t)$.

Figure – El receptor implementado con un filtro apareado.

Esquema de un receptor

- Imaginemos entonces que cada función $\phi_i(t)$ tiene soporte en $t = [0, T_s)$.
- Pasemos $r(t)$ por un filtro con respuesta a impulso $h(t) = \phi_i^*(-t)$. Calculemos $x(t) = r(t) * h(t)$.

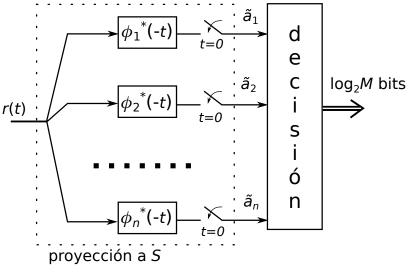


Figure – El receptor implementado con un filtro apareado.

Bibliografía de este tema

- Capítulo 1 del libro de Comina
- Del Capítulo 5 del libro de Rice (DIGITAL COMMUNICATIONS - A DISCRETE-TIME APPROACH), secciones 5.1 a 5.1.4 inclusive.
- Capítulo 5 del libro de Gallager, PRINCIPLES OF DIGITAL COMMUNICATIONS.

PAM

Pulso

- La modulación PAM tiene como base del espacio de funciones :

$$\Phi_0(t) = p(t) \tag{4}$$

- $p(t)$ es un pulso de energía uno. Es un subespacio de dimensión 1 del espacio $\mathcal{L}_2$. La constelación es $\mathcal{M} = \{-A(M-1), ..., -A, A, ..., A(M-1)\}$
- Extenderemos esa notación y notaremos $s(t)$ a la señal correspondiente al envío de un conjunto de símbolos cada uno de duración T_s :

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) \tag{5}$$

PAM

Pulso

- La modulación PAM tiene como base del espacio de funciones :

$$\Phi_0(t) = p(t) \tag{4}$$

- $p(t)$ es un pulso de energía uno. Es un subespacio de dimensión 1 del espacio $\mathcal{L}_2$. La constelación es $\mathcal{M} = \{-A(M-1), ..., -A, A, ..., A(M-1)\}$
- Extenderemos esa notación y notaremos $s(t)$ a la señal correspondiente al envío de un conjunto de símbolos cada uno de duración T_s :

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) \tag{5}$$

PAM

Pulso

- La modulación PAM tiene como base del espacio de funciones :

$$\Phi_0(t) = p(t) \tag{4}$$

- $p(t)$ es un pulso de energía uno. Es un subespacio de dimensión 1 del espacio $\mathcal{L}_2$. La constelación es $\mathcal{M} = \{-A(M-1), ..., -A, A, ..., A(M-1)\}$
- Extenderemos esa notación y notaremos $s(t)$ a la señal correspondiente al envío de un conjunto de símbolos cada uno de duración T_s :

$$s(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) \tag{5}$$

PAM bandabase

Transmisor/Receptor

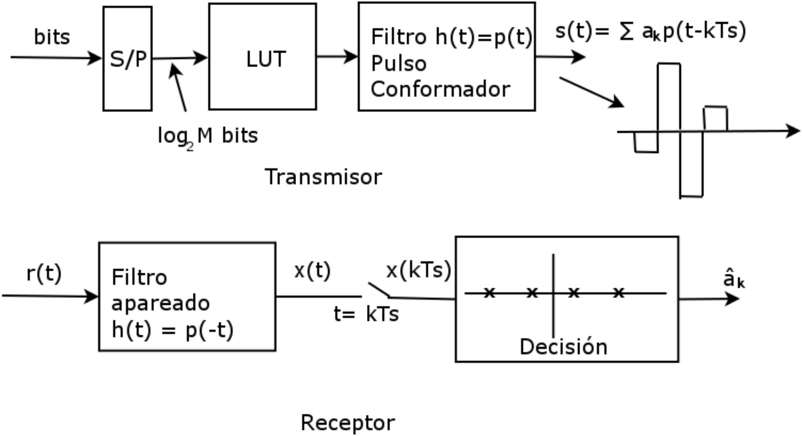


Figure – PAM transmisor/receptor

PAM

Transmisor Digital

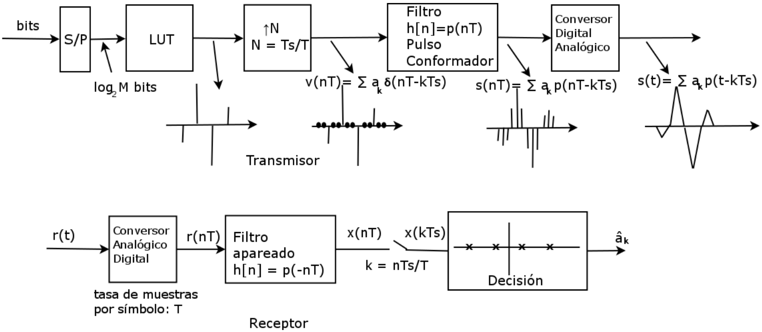


Figure – Diagrama transmisor/receptor PAM digital

PAM

Espectro pasa banda

$$
\begin{aligned}
s(t) &= 2\,\mathrm{Re}(s_b(t)e^{j2\pi f_c t}) \\
&= 2s_b(t)\cos(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

$$S(f) = S_b(f+f_c) + S_b(f-f_c)$$

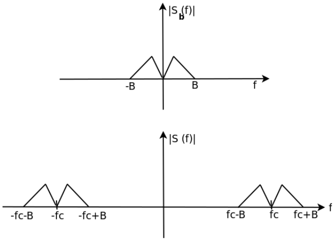


Figure – Espectro de modulación PAM pasabanda

QAM

Introducción

- QAM es similar a PAM pasabanda salvo porque su forma de onda en bandabase es compleja y no real.
- La base de funciones que se utiliza estará definida por las siguientes señales :

$$\Phi_0(t) = \sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t) \quad (6)$$
$$\Phi_1(t) = -\sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Donde $p(t)$ es un pulso conformador.

QAM

Introducción

- QAM es similar a PAM pasabanda salvo porque su forma de onda en bandabase es compleja y no real.
- La base de funciones que se utiliza estará definida por las siguientes señales :

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sqrt{2}p(t)\cos(2\pi f_c t) \\ \Phi_1(t) &= -\sqrt{2}p(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{6}$$

Donde $p(t)$ es un pulso conformador.

QAM

Componente en fase y cuadratura

- Los bits se mapean a símbolos $a_k = a_{k0} + j a_{k1}$ complejos. Se pasan por el pulso conformador obteniendo la señal bandabase :

$$s_b(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s)$$

- Se lleva a frecuencia f_c y se toma su parte real para transmitirla :

$$s(t) = \sqrt{2} \sum_k \mathrm{Re}\left\{ a_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

$$s(t) = \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k0} p(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t)}_{I(t)} - \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k1} p(t - kT_s) \sin(2\pi f_c t)}_{Q(t)}$$

QAM

Componente en fase y cuadratura

- Los bits se mapean a símbolos $a_k = a_{k0} + ja_{k1}$ complejos. Se pasan por el pulso conformador obteniendo la señal bandabase :

$$s_b(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s)$$

- Se lleva a frecuencia f_c y se toma su parte real para transmitirla :

$$s(t) = \sqrt{2} \sum_k \mathrm{Re}\left\{a_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_c t}\right\}$$

$$s(t) = \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k0} p(t - kT_s)}_{I(t)} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k1} p(t - kT_s)}_{Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

QAM

Componente en fase y cuadratura

- Los bits se mapean a símbolos $a_k = a_{k0} + ja_{k1}$ complejos. Se pasan por el pulso conformador obteniendo la señal bandabase :

$$s_b(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s)$$

- Se lleva a frecuencia f_c y se toma su parte real para transmitirla :

$$s(t) = \sqrt{2} \sum_k \mathrm{Re}\left\{a_k p(t - kT_s) e^{j2\pi f_c t}\right\}$$

$$s(t) = \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k0} p(t - kT_s)}_{I(t)} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{\sqrt{2} \sum_k a_{k1} p(t - kT_s)}_{Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

QAM

Ejemplo de Constelaciones

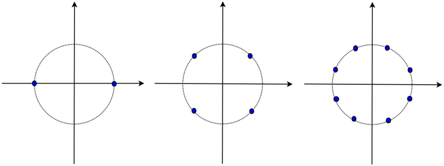


Figure – Constelaciones BPSK, QPSK y 8 PSK

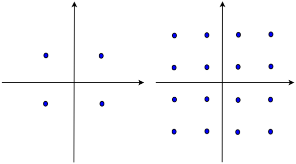


Figure – Constelaciones 4QAM y 16QAM

QAM

Transmisor y Receptor

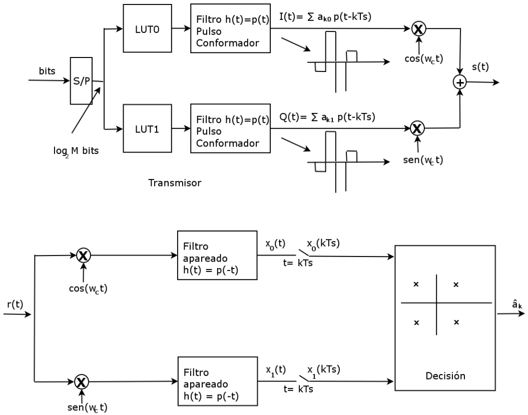


Figure – Transmisor y receptor QAM

Pulso conformador

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

En el receptor PAM bandabase tenemos que :

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) + w(t)$$

Con filtro apareado $h(t) = p(-t)$ y soporte $[T_1, T_2)$. La salida del filtro apareado queda :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t+T_1}^{t+T_2} \sum_k a_k p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \int_{t+T_1}^{t+T_2} w(\tau) p(\tau - t) d\tau \\ &= \sum_k a_k \int_{t+T_1}^{t+T_2} p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \eta(t) \\ &= \sum_k a_k r_p(kT_s - t) + \eta(t) \end{aligned}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

En el receptor PAM bandabase tenemos que :

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) + w(t)$$

Con filtro apareado $h(t) = p(-t)$ y soporte $[T_1, T_2)$. La salida del filtro apareado queda :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t+T_1}^{t+T_2} \sum_k a_k p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \int_{t+T_1}^{t+T_2} w(\tau) p(\tau - t) d\tau \\ &= \sum_k a_k \int_{t+T_1}^{t+T_2} p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \eta(t) \\ &= \sum_k a_k r_p(kT_s - t) + \eta(t) \end{aligned}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

En el receptor PAM bandabase tenemos que :

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) + w(t)$$

Con filtro apareado $h(t) = p(-t)$ y soporte $[T_1, T_2)$. La salida del filtro apareado queda :

$$x(t) = \int_{t+T_1}^{t+T_2} \sum_k a_k p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \int_{t+T_1}^{t+T_2} w(\tau) p(\tau - t) d\tau$$

$$= \sum_k a_k \int_{t+T_1}^{t+T_2} p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \eta(t)$$

$$= \sum_k a_k r_p(kT_s - t) + \eta(t)$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

En el receptor PAM bandabase tenemos que :

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) + w(t)$$

Con filtro apareado $h(t) = p(-t)$ y soporte $[T_1, T_2)$. La salida del filtro apareado queda :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t+T_1}^{t+T_2} \sum_k a_k p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \int_{t+T_1}^{t+T_2} w(\tau) p(\tau - t) d\tau \\ &= \sum_k a_k \int_{t+T_1}^{t+T_2} p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \eta(t) \\ &= \sum_k a_k r_p(kT_s - t) + \eta(t) \end{aligned}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

En el receptor PAM bandabase tenemos que :

$$r(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s) + w(t)$$

Con filtro apareado $h(t) = p(-t)$ y soporte $[T_1, T_2)$. La salida del filtro apareado queda :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t+T_1}^{t+T_2} \sum_k a_k p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \int_{t+T_1}^{t+T_2} w(\tau) p(\tau - t) d\tau \\ &= \sum_k a_k \int_{t+T_1}^{t+T_2} p(\tau - kT_s) p(\tau - t) d\tau + \eta(t) \\ &= \sum_k a_k r_p(kT_s - t) + \eta(t) \end{aligned}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

$r_p(t)$ es la autocorrelación del pulso conformador :

$$r_p(t) = \int_{T_1}^{T_2} p(\tau)p(\tau - t)d\tau$$

La salida muestreada en nT_s tendrá la forma :

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= \sum_k a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \\ &= a_n r_p(0) + \sum_{k \neq n} a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \end{aligned}$$

La interferencia inter-simbólica (ISI) es cero si :

$$r_p(nT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

$r_p(t)$ es la autocorrelación del pulso conformador :

$$r_p(t) = \int_{T_1}^{T_2} p(\tau)p(\tau - t)d\tau$$

La salida muestreada en nT_s tendrá la forma :

$$x(nT_s) = \sum_k a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s)$$

$$= a_n r_p(0) + \sum_{k \neq n} a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s)$$

La interferencia inter-simbólica (ISI) es cero si :

$$r_p(nT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

$r_p(t)$ es la autocorrelación del pulso conformador :

$$r_p(t) = \int_{T_1}^{T_2} p(\tau)p(\tau - t)d\tau$$

La salida muestreada en nT_s tendrá la forma :

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= \sum_k a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \\ &= a_n r_p(0) + \sum_{k \neq n} a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \end{aligned}$$

La interferencia inter-simbólica (ISI) es cero si :

$$r_p(nT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Pulso de Nyquist

Salida del filtro apareado

$r_p(t)$ es la autocorrelación del pulso conformador :

$$r_p(t) = \int_{T_1}^{T_2} p(\tau)p(\tau - t)d\tau$$

La salida muestreada en nT_s tendrá la forma :

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= \sum_k a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \\ &= a_n r_p(0) + \sum_{k \neq n} a_k r_p((k-n)T_s) + \eta(nT_s) \end{aligned}$$

La interferencia inter-simbólica (ISI) es cero si :

$$r_p(nT_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{7}$$

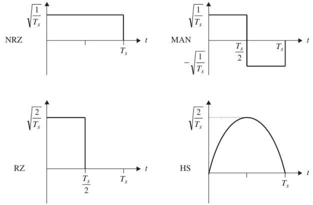


Figure A.1.1 The non-return-to-zero (NRZ), the return-to-zero (RZ), Manchester (MAN), and half-sine (HS) pulse shapes as shown.

Figure – Algunos pulsos conformadores (Fuente : Rice)

Table A.1.2 Frequency-domain properties of the NRZ, RZ, MAN, and HS pulse shapes

Name	$\lvert P(f)\rvert^2$	B_{abs}	$B_{90\%}$	$B_{99\%}$	$B_{-60\text{ dB}}$
NRZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \dfrac{\sin^2(\pi f T_s)}{(\pi f T_s)^2}$	∞	$0.85/T_s$	$10.29/T_s$	$318.50/T_s$
RZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = \dfrac{T_s}{2} \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$1.70/T_s$	$20.57/T_s$	$637/T_s$
MAN	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \dfrac{\sin^4\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$3.05/T_s$	$30.75/T_s$	$635/T_s$
HS	$\lvert P(f)\rvert^2 = \dfrac{T_s}{2\pi^2} \left(\dfrac{\cos(\pi f T_s)}{(f T_s)^2 - \frac{1}{4}}\right)^2$	∞	$0.78/T_s$	$1.18/T_s$	$15/T_s$

Figure – Características espectrales (Fuente : Rice)

- Los pulsos anteriores, aunque no introduzcan ISI no tienen buenas características espectrales.
- ¿Es posible concebir pulsos de soporte acotado en frecuencia que no generen ISI ? La respuesta es si, relajando la condición que el pulso tenga soporte acotado en el tiempo.

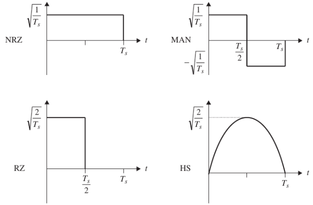


Figure A.1.1 The non-return-to-zero (NRZ), the return-to-zero (RZ), Manchester (MAN), and half-sine (HS) pulse shapes as shown.

Table A.1.2 Frequency-domain properties of the NRZ, RZ, MAN, and HS pulse shapes

Name	$\lvert P(f)\rvert^2$	B_{abs}	$B_{90\%}$	$B_{99\%}$	$B_{-60\ \mathrm{dB}}$
NRZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \frac{\sin^2(\pi f T_s)}{(\pi f T_s)^2}$	∞	$0.85/T_s$	$10.29/T_s$	$318.50/T_s$
RZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = \frac{T_s}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$1.70/T_s$	$20.57/T_s$	$637/T_s$
MAN	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \frac{\sin^4\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$3.05/T_s$	$30.75/T_s$	$635/T_s$
HS	$\lvert P(f)\rvert^2 = \frac{T_s}{2\pi^2} \left(\frac{\cos(\pi f T_s)}{(f T_s)^2 - \frac{1}{4}}\right)^2$	∞	$0.78/T_s$	$1.18/T_s$	$15/T_s$

Figure – Algunos pulsos conformadores (Fuente : Rice)

Figure – Características espectrales (Fuente : Rice)

- Los pulsos anteriores, aunque no introduzcan ISI no tienen buenas características espectrales.
- ¿Es posible concebir pulsos de soporte acotado en frecuencia que no generen ISI ? La respuesta es si, relajando la condición que el pulso tenga soporte acotado en el tiempo.

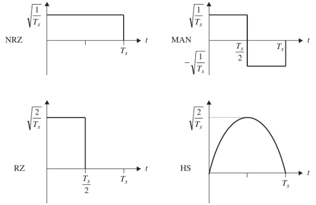


Figure A.1.1 The non-return-to-zero (NRZ), the return-to-zero (RZ), Manchester (MAN), and half-sine (HS) pulse shapes as shown.

Figure – Algunos pulsos conformadores (Fuente : Rice)

Table A.1.2 Frequency-domain properties of the NRZ, RZ, MAN, and HS pulse shapes

Name	$\lvert P(f)\rvert^2$	B_{abs}	$B_{90\%}$	$B_{99\%}$	$B_{-60\text{ dB}}$
NRZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \dfrac{\sin^2(\pi f T_s)}{(\pi f T_s)^2}$	∞	$0.85/T_s$	$10.29/T_s$	$318.50/T_s$
RZ	$\lvert P(f)\rvert^2 = \dfrac{T_s}{2} \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$1.70/T_s$	$20.57/T_s$	$637/T_s$
MAN	$\lvert P(f)\rvert^2 = T_s \dfrac{\sin^4\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f T_s}{2}\right)^2}$	∞	$3.05/T_s$	$30.75/T_s$	$635/T_s$
HS	$\lvert P(f)\rvert^2 = \dfrac{T_s}{2\pi^2} \left(\dfrac{\cos(\pi f T_s)}{(f T_s)^2 - \frac{1}{4}}\right)^2$	∞	$0.78/T_s$	$1.18/T_s$	$15/T_s$

Figure – Características espectrales (Fuente : Rice)

- Los pulsos anteriores, aunque no introduzcan ISI no tienen buenas características espectrales.
- ¿Es posible concebir pulsos de soporte acotado en frecuencia que no generen ISI ? La respuesta es si, relajando la condición que el pulso tenga soporte acotado en el tiempo.

Pulso de Nyquist

Teorema

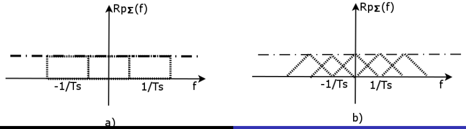
Buscamos $r_p(t)$ que tenga cruces por cero en múltiplos no nulos de nT_s, el teorema de Nyquist para no ISI define las condiciones para que un pulso cumpla esto.

Theorem (Nyquist)

Un pulso $p(t)$ es un pulso de Nyquist, si y solo si $R_p(f)$ ($R_p(f)$ TF de $r_p(t)$, y $\exists$ este par transformada/antitransformada) verifica :

$$R_{p\Sigma}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_p(f + \frac{m}{T_s}) = T_s \tag{8}$$

La condición implica que el espectro $R_{p\Sigma}(f)$ sea plano



Pulso de Nyquist

Raised Cosine

$$R_p(f) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \\ \frac{T_s}{2}\left[1 + \cos(\frac{\pi|f|T_s}{\alpha} - \frac{\pi(1-\alpha)}{2\alpha})\right] & \frac{1-\alpha}{2T_s} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T_s} \end{cases} \tag{9}$$

donde α es el exceso de ancho de banda.

$$r_p(t) = \operatorname{sinc}(t/T_s)\frac{\cos(\pi\alpha t/T_s)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T_s}\right)^2} \tag{10}$$

Pulso de Nyquist

Raised Cosine

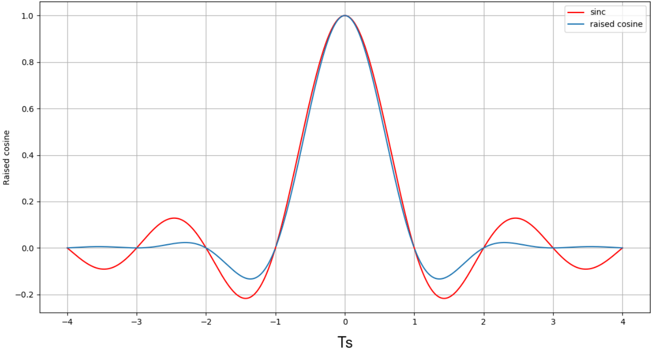


Figure – Pulso Raised Cosine en el tiempo $r_p(t)$ comparado con una función sinc

Pulso de Nyquist

Raised Cosine

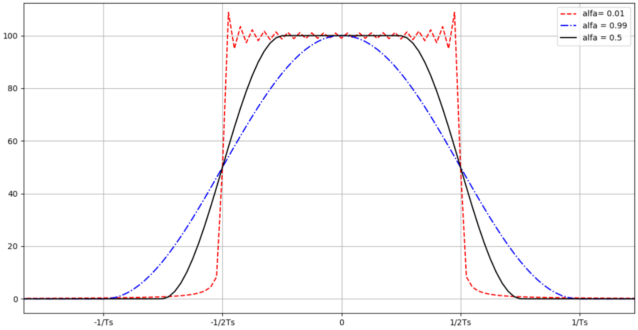


Figure – Pulso Raised Cosine en frecuencia $R_p(f)$ para diferentes valores de α