e^{2k}

$y' = y^2 - 1$ $\qquad$ $y(t) = \dfrac{1 + ce^{2t}}{1 - ce^{2t}}$, $\quad c > 0$

$x_0 = y(0) = \dfrac{1+c}{1-c} \longleftrightarrow x_0(1-c) = 1+c$

$x_0 - x_0 c = 1 + c$

$x_0 - 1 = x_0 c + c$

$x_0 - 1 = (x_0 + 1)c$

$\dfrac{x_0 - 1}{x_0 + 1} = c$

$$\boxed{\begin{array}{l} c > 0 \\ 1 + c > 1 \\ 1 - c < 1 \\ x_0 = \dfrac{1+c}{1-c} > 1 \end{array}}$$

$x_0 - 1 > 0 \qquad x_0 + 1 > x_0 - 1 > 0$

$0 < \dfrac{x_0 - 1}{x_0 + 1} < 1$

$c \in (-1, 0) \cup \boxed{(0, 1)}$

3. *a*) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

→ 1) $y' + y\cos x = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} 2)\ x(x-1)y' + (1-2x)y = 0 \\ 3)\ y' - (2/x)y = 0 \end{array}}$

b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:

→ 1) $y' + y\cos x = \cos x \operatorname{sen} x$

2) $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$ $\quad$ Var. constantes

3) $y' - (2/x)y = x^4$

3) a) 1) $\underline{y' + y\cos x = 0}$ $\quad$ ec. homogenea

Objetivo: resolver $y' + y\cos x = \cos x \operatorname{sen} x$

$y' = \underbrace{(-y)}_{y}\underbrace{(\cos x)}_{x}$ $\qquad$ $\dfrac{y'}{y} = -\cos x$

$\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = -\int \cos x\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\operatorname{sen}(x) + k$

$y = y(x)$

$dy = y'(x)dx$

$$\log y = -\operatorname{sen} x + k \xrightarrow{e} y = e^{-\operatorname{sen} x + k}$$

$$= K e^{-\operatorname{sen} x}$$

$K = e^{k}$

Hallamos $y_h(x)$ solución de

$y' + y\cos(x) = 0$ Verificamos:

$y_h'(x) = -\cos x\, K e^{-\operatorname{sen} x} \rightarrow y' + y\cos(x) =$
$-\cos x\, K e^{-\operatorname{sen} x} + K e^{-\operatorname{sen} x}\cos x = 0$

Ahora queremos resolver: $y' + y\cos x = \cos x \operatorname{sen} x$

Método: Variación de constantes

Suponemos que la solución es de la forma:

$y(x) = K(x) e^{-\operatorname{sen} x}$ quiero despejar $K(x)$

$$y'(x) = K'(x) e^{-\operatorname{sen} x} + K(x)(-\cos x\, e^{-\operatorname{sen} x})$$

$$y' + y\cos x = K'(x) e^{-\operatorname{sen} x} + \cancel{K(x)(-\cos x\, e^{-\operatorname{sen} x})} + \cancel{K(x)\cos x\, e^{-\operatorname{sen} x}}$$
$$= K'(x) e^{-\operatorname{sen} x} = \cos x \operatorname{sen} x$$

$$\rightarrow K'(x) = \cos x \operatorname{sen} e^{\operatorname{sen} x}$$

$$K(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x}\, dx$$

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x\, dx$

$$= \int u e^u\, du = -e^u + u e^u + k$$

$$K(x) = -e^u + u e^u \overset{+k}{=} -e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + k$$

La Sol. que buscabamos:

$$y(x) = (-e^{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x\, e^{\operatorname{sen} x} + k)\, e^{-\operatorname{sen} x}$$

4. *a*) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

Sabemos que las soluciones son de la forma

$$y(t) = K e^{t\lambda}$$
$$y'(t) = \lambda K e^{t\lambda}$$
$$y''(t) = \lambda^2 K e^{t\lambda}$$

$\longrightarrow \quad \to y'' - 5y' + 6y =$

$$\lambda^2 K e^{t\lambda} - 5\lambda K e^{t\lambda} + 6 K e^{t\lambda}$$
$$= \underbrace{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)}_{\chi(\lambda)} \underbrace{K}_{\neq 0} \underbrace{e^{t\lambda}}_{>0} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Las soluciones al problema $y'' - 5y' + 6y = 0$

son de la forma $y(t) = K_1 e^{2t} + K_2 e^{3t}$ * , $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = 0$ es solución

b) Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2.$

b) $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$

Vamos a despejar K_1 y K_2 *

$$y(1) = K_1 e^2 + K_2 e^3 = e^2 \qquad F_1$$

$$y'(1) = 2K_1 e^2 + 3K_2 e^3 = 3e^2 \qquad F_2$$

$$F_2 = F_2 - 2F_1 \qquad 0K_1 + (3K_2 - 2K_2) e^3 = 3e^2 - 2e^2$$
$$K_2 (3-2) e^2 = 3e^2 - 2e^2$$
$$K_2 = \frac{3e^2 - 2e^2}{(3-2)e^3} = \frac{\cancel{(3-2)} e^2}{\cancel{(3-2)} e^3} = \frac{1}{e}$$

$$K_1 e^2 + \left(\frac{1}{e}\right) e^3 = e^2$$

$$K_1 e^2 = e^2 - e^2 = 0 \quad , K_2 = 0$$

$$y(t) = e^{3t}\left(\frac{1}{e}\right) = e^{3t-1}$$

b) **Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:**

a) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2.$

b) $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$

b) $y'' - 6y' + 5y = 0$ 1° Hallar solución general:

$$K_1 e^{t\lambda_1} + K_2 e^{t\lambda_2}$$

λ_1, λ_2 raíces del pol. característico

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 1$$

Las soluciones son de la forma:

$$K_1 e^{5t} + K_2 e^{t}$$

$$y(0) = 3$$
$$y'(0) = 11$$

$$y(0) = K_1 + K_2 = 3$$
$$y'(0) = 5K_1 + K_2 = 11$$

$$F_2 - F_1 \qquad 4K_1 = 8 \rightarrow K_1 = 2$$

$$2 + K_2 = 3$$
$$K_2 = 1$$

$$y(t) = 2e^{5t} + e^{t}$$
$$y'(t) = 10e^{5t} + e^{t}$$

5. Hallar todos los valores reales de la constante a para que las ecuaciones $y''+ay'-2y=0$ e $y''-2y'+ay=0$ tengan soluciones en común además de $y(x)\equiv 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} y''+ay'-2y=0 \\ y''-2y'+ay=0 \end{array}\right\}$$

Observamos si $a=-2$ las ecuaciones quedan igual $y''-2y'-2y$ (*)

$\lambda^2-2\lambda-2$ | $\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$

ej: $e^{(1+i)t}$ es solución de (*)

$$\boxed{e^{(1+i)t} = e^t\cdot e^{it} = e^t(\cos(t)+i\operatorname{sen}(t))}$$

$$K_1 e^{(1+i)t} + K_2 e^{(1-i)t}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y''+ay'-2y=0 \\ 2)\ y''-2y'+ay=0 \end{array}\right\}$$

Vamos a suponer que $a\neq -2$ y que tenemos y_0 sol. de 1) y 2)

1) $y_0''+ay_0'-2y_0=0$

$y_0''=-ay_0'+2y_0$

2) $0=y_0''-2y_0'+ay_0$

$y_0''=2y_0'-ay_0$

$$-ay_0'+2y_0=2y_0'-ay_0$$

$$-ay_0'-2y_0'=-ay_0-2y_0$$

$$y_0'(a+2)=y_0(a+2)$$

$y_0(t)=Ke^{tx}$

$$y_0'=y_0 \longrightarrow \underline{y_0(t)=Ke^t} \quad (\lambda=1)$$

1 debe ser raíz de 1) y 2)

1) $y'' + ay' - 2y = 0$ $\qquad \lambda^2 + a\lambda - 2$

2) $y'' - 2y' + ay = 0$ $\qquad \lambda^2 - 2\lambda + a$

1 es raiz $\qquad 1 + a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$

$1 - 2 + a = 0$

Ke^t $\qquad \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y'' - 2y + 1 = 0 \end{cases}$