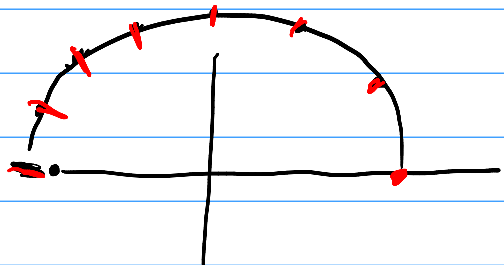
9. Sea $A = \left\{ \left( \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

$$\left(\underbrace{\cos(\pi/7) + i\,\text{sen}(\pi/7)}\right)^n = \left(e^{i\pi/7}\right)^n \qquad x^{14}-1$$



$$\left(e^{\frac{i\pi}{7}}\right)^{15} = e^{i\frac{\pi}{7}}$$

$$\|$$

$$e^{i\frac{15}{7}\pi} = e^{i\frac{\pi}{7} + i2\pi}$$

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $y' = y^2 - 1$

b) $(1+y^2)yy' + (1+y^2) = 0$

c) $xe^{2y}y' - (1+e^{2y}) = 0$

a) $y'(x) = \underline{A(y)}\ \underline{B(x)} \longrightarrow \int \frac{y'}{A(y)} = \int B(x)$

$y'(x) = \underline{(y^2(x) - 1)}\ \underline{1}$

$\downarrow \qquad A(y) = y^2 - 1 \qquad B(x) = 1$

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)-1} = 1 \longrightarrow \int \frac{y'(x)\,dx}{y^2(x)-1} = \int 1\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2(x)-1}\,dy = \int \frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)} = \frac{1}{2}\log|y-1| - \frac{1}{2}\log|y+1|$$

$(y-1)(y+1)$

La funciones $y(x) = \pm 1$ cumplen a)

$$y' = y^2(x) - 1$$

$$0 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{2}\log|y-1| - \frac{1}{2}\log|y+1| = \int 1\,dx = x + k$$

$$\log\sqrt{|y-1|} - \log\sqrt{|y+1|} = x + k$$

$$\log\sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}} = x + k$$

$$\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = Ke^{x} \longrightarrow \frac{|y-1|}{|y+1|} = Ke^{2x}$$

$$y-1 = Ke^{2x}(y+1)$$

$$y-1 = yKe^{2x} + Ke^{2x}$$

$$y(1-Ke^{2x}) = Ke^{2x}+1$$

$$y(x) = \frac{Ke^{2x}+1}{1-Ke^{2x}} = \frac{1+Ke^{2x}}{1-Ke^{2x}}$$

Verificar que es solucion
¿donde esta definida?
ver que cumple:

$$y' = y^2 - 1$$

$$y'(x) = \frac{2Ke^{2x}(1-Ke^{2x}) - (Ke^{2x}+1)(-2Ke^{2x})}{(1-Ke^{2x})^2} =$$

$$= \frac{2Ke^{2x}(1-\cancel{Ke^{2x}}) + 2Ke^{2x}(1+\cancel{Ke^{2x}})}{(1-Ke^{2x})^2}$$

$$= \frac{4Ke^{2x}}{(1-Ke^{2x})^2}$$

$$\frac{Ke^{2x}+1}{1-Ke^{2x}} = y(x) \qquad y^2-1$$

$$y^2-1 = \left(\frac{Ke^{2x}+1}{1-Ke^{2x}}\right)^2 - 1 = \frac{(Ke^{2x}+1)^2-(1-Ke^{2x})^2}{(1-Ke^{2x})^2}$$

$$= \frac{4Ke^{2x}}{(1-Ke^{2x})^2}$$

$$y(x) = \frac{1+Ke^{2x}}{1-Ke^{2x}}$$

$$1-Ke^{2x}=0 \longleftrightarrow \quad 1 = Ke^{2x}$$

$$0 = \log K + 2x$$

$$-\log\sqrt{K} = x$$

b) $(1+y^2)yy' + (1+y^2) = 0$

c) $xe^{2y}y' - (1+e^{2y}) = 0$

b) $(1+y^2)yy' + (1+y^2) = 0$

$$(1+y^2)yy' = -(1+y^2) \rightarrow y' = \frac{-\cancel{(1+y^2)}}{\cancel{(1+y^2)}y}$$

$$y' = -\frac{1}{y} \rightarrow \boxed{yy' = -1}$$

$$\int yy' = -\int 1\,dx \qquad \int y\,dy = -x$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + k$$

$$y^2 = 2(-x+k)$$

$$y = \sqrt{2(-x+k)}$$

$$y y' = \frac{-\cancel{2}\sqrt{\cancel{2(1-x+k)}}}{\cancel{2}\sqrt{\cancel{2(1-x+k)}}} = -1$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = y(x)/x$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

   *a)* $x^2y' + y(y-x) = 0$ $\leftarrow$

   *b)* $(x+y)y' = x - y$

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad \begin{cases} y(x) = u(x)x \\ y'(x) = u'(x)x + u(x) \end{cases}$$

$$x^2y' + y(y-x) = 0$$

$$x^2(u'(x)x + u(x)) + u(x)x(u(x)x - x) = 0$$

$$x^2(u'(x)x + u(x)) = -\cancel{x^2} \cdot u(x)(u(x) - 1)$$

$$u'(x)x + u(x) = -u(x)(u(x) - 1)$$

$$u'(x)x = -u(x)(u(x) - 1) - u(x)$$

$$u'(x)x = -u^2(x) + \cancel{u(x)} - \cancel{u(x)}$$

$$u'(x)x = -u^2(x)$$

$$u = u(x)$$
$$du = u'(x)dx$$

$$-\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \frac{1}{x} \qquad -\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = \int \frac{1}{u^2(x)}du$$

$$-\int \frac{1}{u^2}du = \log x$$

$$\frac{1}{u} = \log|x| + k \rightarrow u = \frac{1}{\log|x| + k}$$

$$y(x) = u(x)x$$

$$y(x) = \frac{x}{\log|x| + k}$$

3. *a*) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

1) $y' + y\cos x = 0$

$$y' = -y\cos x \longrightarrow \frac{y'}{y} = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\operatorname{sen}(x).$$

$$\log|y| = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow y = e^{-\operatorname{sen}(x)}$$

1) a) Sobre el dominio $K = \dfrac{x_0 - 1}{x_0 + 1}$

$$\frac{1 + Ke^{2x}}{1 - Ke^{2x}}$$

## Ejercicio 1

a) Las soluciones constantes son $x(t) = \pm 1$. Si $x(0) \neq \pm 1$, entonces $x(t) = \frac{2}{1-ce^{2t}} - 1 = \frac{1+ce^{2t}}{1-ce^{2t}}$ con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observar que $c = \frac{x_0-1}{x_0+1}$ por lo que $c \in (-1,0) \cup (0,1)$

Además: si $|x_0| > 1$, $c \in (0,1)$ y $c = e^{-2k}$ para cierto $k > 0$, entonces $x(t) = \frac{1}{\tanh(k-t)}$

Y si $|x_0| < 1$, $c \in (-1,0)$ y $c = -e^{-2k}$ para cierto $k > 0$, entonces $x(t) = \tanh(k-t)$

Donde tanh es la función *tangente hiperbólico*: $\tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

11. Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

$P(ix) = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$ entonces $P(-ix) = 0$

$(z - ix)(z + ix)$ divide al polinomio $P(z)$

$$(z^2 + x^2)(\underbrace{a + bz + cz^2}) = P(z)$$