$f - p \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{\|x\|} = 0$

Taylor en varias variables

1. Sean $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como $g(x) = e^x$ y $h(x) = sen(x)$.

   a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g y h en $x = 0$.

   b) Considere ahora $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = g(x)h(y)$

   c) Calcular df y df^2 de f en $(0,0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$.

   Observar que $T_2 f$ en $(0,0)$ puede obtenerse multiplicando los polinomios de Taylor de orden 2 de g y h, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 2. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones g y h, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

2. Sea $f(x, y) = e^{(sen(x)+y)}$ y $g(x, y) = sen(x) + y$

   a) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0,0)$.

   b) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0,0)$.

   Observar que $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3 h \circ T_3 g$ donde $h(x) = e^x$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 3. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones f y g, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

1) $g(x) = e^x \qquad P_{e^x,2,0} = \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2}}$

$h(x) = \operatorname{sen} x \qquad P_{\operatorname{sen}(x),2,0} = x$

b) $f(x,y) = g(x) \cdot h(y) = e^x \cdot \operatorname{sen} y$

$$df = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \end{pmatrix}$$

$P_{f,2,0} = (P_{g,2,0})(P_{h,2,0})$ sacando los terminos de grado mayor a 2

Teorema 6.31 (Taylor)**.** Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función de clase C^{k+1} en un entorno de $a \in \mathbb{R}^m$. Entonces,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}d^2 f_a(h) + \frac{1}{3!}d^3 f_a(h) + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f_a(h) + r_k(h),$$

donde el resto r_k es una función que cumple $\lim_{h \to (0,0,\ldots,0)} \frac{r_k(h)}{\|h\|^k} = 0.$

$$f((0,0)+(x,y)) = f(0,0) + df_{(0,0)}((x,y)) + \frac{1}{2} d^2 f_{(0,0)}(x,y)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{1}{2}\left[\overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial^2 x}(0,0)} x^2 + \overset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0)} xy + \overset{=1}{\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0,0)} yx + \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial^2 y}(0,0)} y^2 \right]$$

$$= y + \frac{1}{2}\left[2xy\right] + r(x,y)$$

En general, si p es un natural, y tenemos una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con todas las derivadas de orden p, el diferencial de orden p se define como:

$$d^p f_a(v) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p = 1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}(a) v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_p}$$

donde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es el vector donde evaluamos df_a^p.
En el caso de funciones de dos variables de clase C^p, esto resulta:

$$d^p f_a(\Delta x, \Delta y) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i} \partial y^i}(a) \Delta x^{p-i} \Delta y^i$$

$$= \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(a)\Delta x^p + \binom{p}{1}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-1}\partial y}(a)\Delta x^{p-1}\Delta y + \cdots + \binom{p}{i}\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i}\partial y^i}(a)\Delta x^{p-i}\Delta y^i + \cdots + \frac{\partial^p f}{\partial y^p}(a)\Delta y^p \Delta x, \Delta y)$$

donde $\binom{p}{i}$ es el coeficiente binomial, que cuenta la cantidad de formas que hay de elegir las i ubicaciones de (digamos) la y en los p lugares. Por ejemplo, como ya vimos, hay tres formas de ordenar dos x y una y: xxy, xyx, yxx. Este coeficiente $\binom{3}{2} = 3$, es el que aparece en el diferencial segundo. En el esquema de demostración del Teorema de Taylor podemos entender por qué aparecen estos números combinatorios.

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)(y) = \boxed{y + xy} + \frac{x^2 y}{2}$$

2. Sea $f(x,y) = e^{(sen(x)+y)}$ y $g(x,y) = sen(x) + y$

   a) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0,0)$.

   b) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0,0)$.

Observar que $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3h \circ T_3g$ donde $h(x) = e^x$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 3. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones f y g, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$e^{(sen(x)+y)}$ $\qquad$ $sen(x)+y$

$f(x,y) = e^{g(x,y)}$

Taylor de g de orden 3 en (0,0)

Taylor de sen(x) de orden 3 en (0,0)

es $\quad x - \dfrac{x^3}{3!}$

Taylor de y es y

Taylor de g de orden 3 en (0,0)

$x - \dfrac{x^3}{3!} + y$

b) Hallar el Taylor de f de orden 3 en (0,0)

$f(x,y) = e^{sen x + y}$

$$d^3_{(0,0)} f(x,y) = \sum_{i+j=1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial y^j}(0,0)\, x^i y^j \leftarrow$$

$f(x,y) = e^{g(x,y)}$ de orden 3 en $(0,0)$

Tylor de e^x es $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$

Tylor de $e^{g(x,y)}$ es

$$1 + g(x) + \frac{(g(x)^2)}{2} + \frac{(g(x)^3)}{3!}$$

cambio $g(x)$ por su Tylor $x - \frac{x^3}{3!} + y$

$$1 + x - \frac{x^3}{3!} + y + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + y\right)^2}{2} + \frac{(x - x^3 + y)^3}{3!}$$

De esta ultima expresion nos interesan los terminos de orden ≤ 3

$(x+y)^3$

$$1 + x - \frac{x^3}{3!} + y + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!}$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{y^2x}{2} + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!}$$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1+y+\frac{y^2}{2})}{x^2+y^2}$

a) El Tylor de orden 2 en (0,0) de $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$

$P(x,y)\,(x)(y) = xy$

$f(x,y) - P(x,y) = r(x,y)$

cumple que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|x,y\|^2} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1+y+y^2/2)}{x^2+y^2}$$

Tylor de orden 2 de $e^{x^2+y(y+1)}$

$$1 + (x^2+y(y+1)) + \frac{(x^2+y(y+1))^2}{2}$$

$\boxed{1 + x^2 + y(y+1)}$

Sabemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1+x^2+y(y+1))}{x^2+y^2} = 0$$

$$1+x^2+y(y+1) = 1+y+\frac{y^2}{2}+x^2+\frac{y^2}{2}$$

$$1+x^2+y(y+1) - \left(x^2+\frac{y^2}{2}\right) = 1+y+\frac{y^2}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y(y+1)} - \left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{e^{x^2+y(y+1)} - (1+x^2+y(y+1))}{x^2+y^2}}_{=0} + \frac{x^2+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} = \lim \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$= 1 + \lim -\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$-\frac{\cancel{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{r^2}}$$