9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.

b) Probar que f es diferenciable.

c) Probar que f no es de clase C^1.

Si $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(-2x)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{-2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Si $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^{\cancel{2}}\,\text{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} t\,\text{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{t^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)}{t} = 0$$

b) $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En la región $\{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$ f es diferenciable (las derivadas parciales son continuas)

En $(0,0)$, $f_x = f_y = 0$. De existir el diferencial debe ser nulo.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Existe T.L.: } D_p f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ que cumple} \\ \displaystyle\lim_{v\to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - D_p f(v)}{\|v\|} = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(p+v) = f(p) + D_p f(v) + r(v) \\ \displaystyle\lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0 \end{array}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^{\cancel{2}} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)}{\cancel{\sqrt{(x^2+y^2)}}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

c) Probar que no es C^1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0 \to \frac{\partial f}{\partial x} \text{ no es continua}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r \operatorname{sen}\theta$

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \begin{cases} \underbrace{2r\cos\theta \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)}_{\xrightarrow[r\to 0]{} 0} - \dfrac{2\cos\theta}{r}\cos\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \\ \end{cases}$$

depende de θ

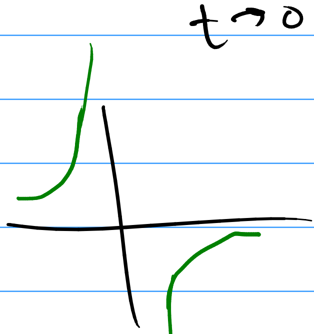
$\to \nexists \lim$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t^2}\right)}_{\to 0} - \frac{2\cancel{t}}{t^{\cancel{2}}}\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{2}{t} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{t^2}\right)}_{\text{acotado}}$$

$-\frac{1}{t}$



este lim no existe

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$

8. ¿Existe alguna función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_x(x,y) = e^{x+y}$ y $f_y(x,y) = \cos(xy)$?

Teorema de Swarz

si f es $C^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Debería cumplirse que $\dfrac{\partial}{\partial y} f_x = e^{x+y}$

se igual a $\dfrac{\partial}{\partial x} f_y = -x \operatorname{sen}(xy)$

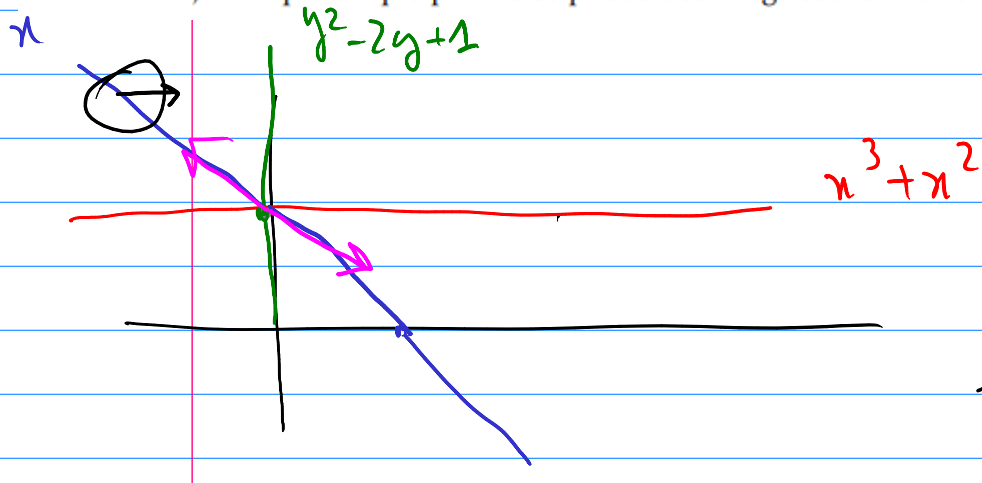
13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que se sabe lo siguiente:

- $f(x,1) = x^3 + x^2$, $\forall x \neq 0$
- $f(0,y) = y^2 - 2y + 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$
- $f(x, 1-x) = x$, $\forall x \neq 0$

a) Indique en qué puntos es posible hallar la derivada parcial respecto a x o respecto a y. En qué puntos es posible hallar el gradiente?

b) Calcular la derivada direccional en $(0,1)$ respecto a $v = (1,-1)$

c) Indique en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de f.



$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ solo podemos afirmar que existe para los puntos $(x,1)$ con $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 3x^2 + 2x$$

$$f(0,1) = y^2 - 2y + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,1) - f(0,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 + t^2}{t} = \lim_{t \to 0} t^2 + t = 0$$

b) $$\lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{f(t, 1-t)}^{t} - f(0,1)}{t}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1$$

f

c) Para afirmar que f es diferenciable en P, (P_1, P_2)

Debe existir $D_P f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$* = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(P_1 + x, P_2 + y) - f(P_1, P_2) - D_P f(x,y)}{\|x,y\|} = 0$$

* No tenemos información suficiente de f para afirmar nada

Para decir que f es diferenciable en p necesitamos que esté definida en un entorno de p

15. Calcular la matriz Jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = e^{x+y} + 2\sin(2x-y)$, $a = (0,0)$

b) $f(x,y,z) = (\underline{e^{z+x+y}}, \underline{x+y+2z})$, $a = (0,1,2)$ $\quad f = (f_1, f_2)$

c) $f(x,y) = (e^{x+y}, \sin(2x-y), \log(1+y^2))$, $a = (\pi,\pi)$

d) $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$, en $a \in \mathbb{R}^p$ fijo cualquiera; siendo $f(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, donde A es una matriz $q \times p$ y $\mathbf{x}$ se escribe como una matriz columna $p \times 1$.

e) $f(x,y) = \langle g(x,y), h(x,y) \rangle$ donde $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son funciones de clase C^1

$$Jf(0,0) = \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

b) $$J_f(0,1,2) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}, & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$f_1 = e^{x+y+z}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Jf(0,1,2) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_pf(v) = Jf(p) \cdot v$$

$$D_{(0,1,2)}f(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & e^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$D_p f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$