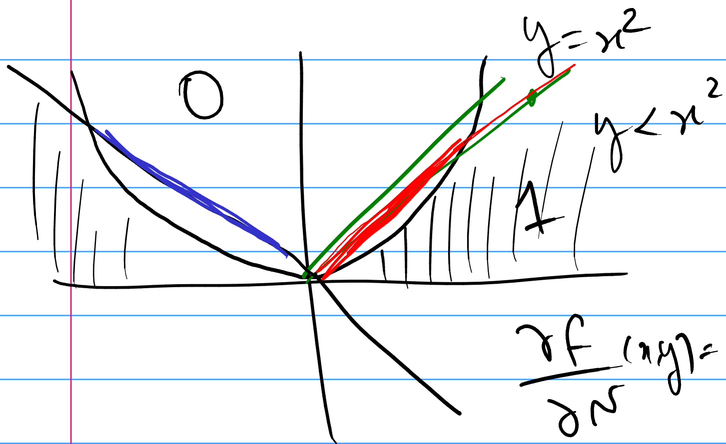
5. Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que exiten todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$, pero sin embargo f no es continua en $(0,0)$. En otras palabras derivar respecto a cualquier dirección no garantiza la continuidad en el punto.



Sea $v = (v_1, v_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv_1, y + tv_2)}{t}$$

$$\lim_{t \to 0} f(tv_1, tv_2) \frac{1}{t}$$

$$(v_1, v_2) \in \quad y = \frac{v_2}{v_1} x$$

Si $t > 0$

$$y > x^2$$
$$t v_2 > t^2 v_1^2$$
$$v_2 > t v_1^2 \to \left| \frac{v_2}{v_1^2} \right| > t$$

Si $t < 0$

$$\cancel{v_2 < t v_1^2}$$
$$\boxed{\frac{v_2}{v_1^2} < t}$$

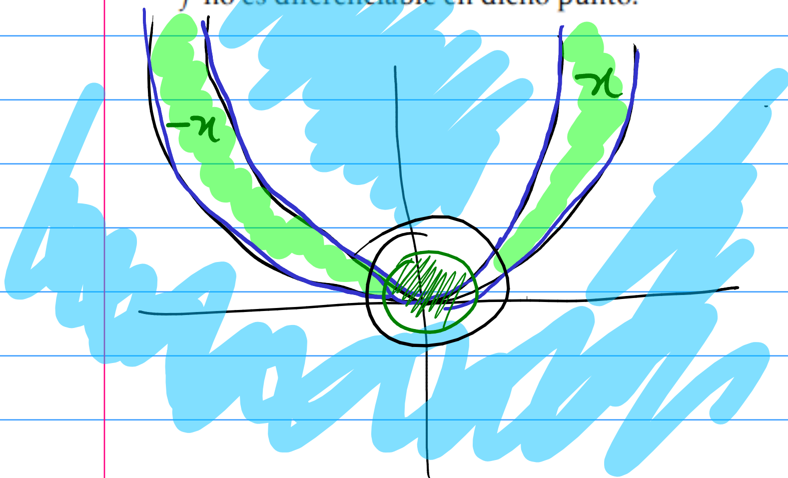
$\lim_{x \to 0} f(x, x^2/2) = 1$, esto prueba que $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$

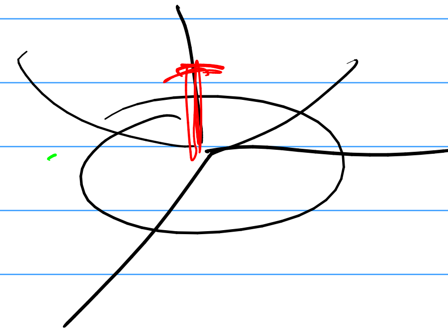
Conclusion no existe el límite

6. Representar gráficamente la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \le x^2 \text{ o } 2x^2 \le y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua y que existen todas las derivadas direccionales en $(0,0)$ y que, sin embargo, f no es diferenciable en dicho punto.





f es continua en $(0,0)$

$g(x,y) = 0$
$h(x,y) = |x|$

g es continua, h es continua en $(0,0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in B(0,\delta)$ (δ_g, δ_h)

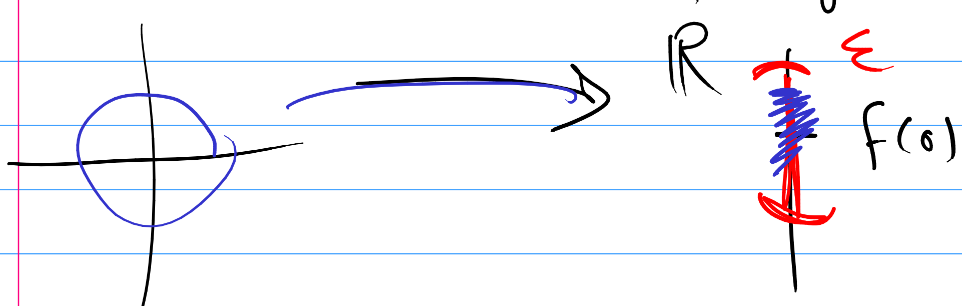
$\Rightarrow f(x,y) \in B(0,\varepsilon)$

$\delta = \min\{\delta_g, \delta_h\}$

Fijo $\varepsilon > 0$

Quiero encontrar $\delta > 0$
Para que cualquier
$(x,y) \in B(0,\delta)$

$f(x,y) \in B(f(0), \varepsilon)$



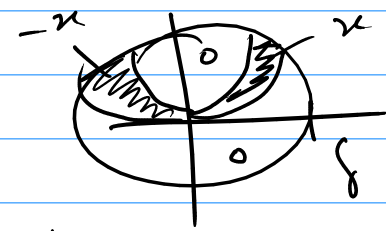
Para g me vale cualquier $\delta_g > 0$

Para h me vale cualquier $\delta_h < \varepsilon$

$h(x,y) = |x|$

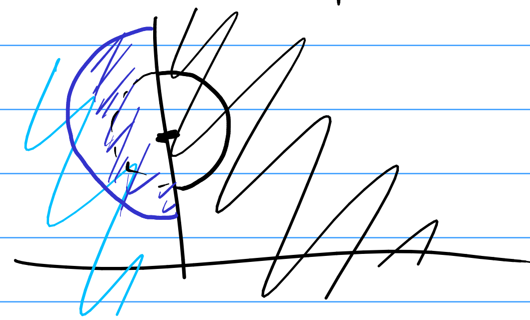
$(x,y) \in B(0,\varepsilon)$

$\delta = \min\{\delta_g, \delta_h\}$



Si $(x,y) \in B(0,\delta)$

$f(x,y) \leq |x| < \varepsilon$



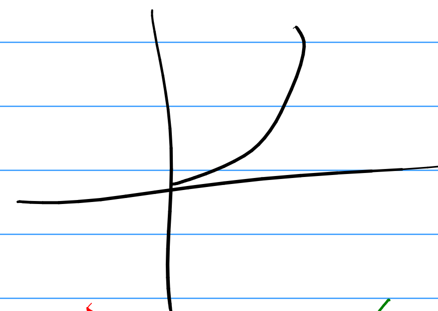
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = 0$$

$v_1 > 0$

si $t > 0$ $\quad y > 2x^2$

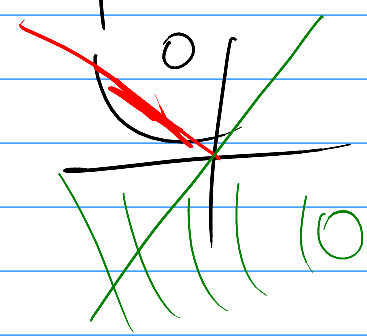
$tv_2 > 2t^2 v_1^2$

$\frac{v_2}{2v_1^2} > t > 0$



$v_2 < 0$

si $t < 0$ $\quad \frac{v_2}{2v_1^2} < t < 0$



¿f es diferenciable en $(0,0)$?

Supongamos que lo es

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2) - f(0,0) - D_{(0,0)}f(v_1,v_2)}{\|(v_1,v_2)\|} = *$$

No existe

Suponiendo que f es diferenciable en $(0,0)$

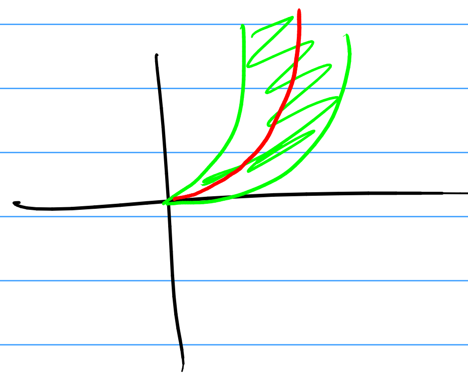
$$D_p f(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$$

$$D_{(0,0)} f(v_1, v_2) = f_x(0,0)\, v_1 + f_y(0,0)\, v_2$$
$$= 0 v_1 + 0 v_2 = 0$$

$$* = \lim_{(v_1,v_2)\to 0} \frac{f(v_1,v_2)}{\|v_1,v_2\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} g(x,y) \qquad g(x,y) = \begin{cases} 0 & y \leq x^2,\ 2x^2 \leq y \\ \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} g\left(x, \frac{3x^2}{2}\right)$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{2}x^2\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{|x|}}{\cancel{\sqrt{x^2}}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}} = 1$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} r \in (0, +\infty] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{r\,|\cos\theta|}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}} = \frac{r|\cos\theta|}{r} = |\cos\theta|$$

$$\boxed{\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta) = L \quad \forall\,\theta \quad \Longleftarrow \quad \lim_{(x,y)\to 0\,0} f(x,y) = L}$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = 1 \qquad \neq$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{|0|}{\sqrt{y^2}} = 0$$

f es dif $\Longrightarrow$ $\exists$ todas las derivadas direccionales

$\not\Longleftarrow$ No vale la vuelta

$\exists \lim\limits_{x,y\to 0,0} f(x,y) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x,ax)$

$\not\Longleftarrow$ No vale

4. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0,0))$ de centro $(0,0)$ y radio R. Mediante el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se obtiene $g\colon V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, donde $V = (0,R)\times[0,2\pi)$.

(a) Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ sii $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $|g(r,\theta) - L| < \varepsilon\ \forall\, r \in (0,\delta), \theta \in [0,2\pi)$.

(b) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ entonces $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta) = L\ \forall\, \theta \in [0,2\pi)$.

(c) Se consideran las funciones f siguientes

$$\text{(i) } f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(ii) } f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(iii) } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta)$, éste último en función de $\theta \in [0,2\pi)$.

(d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

(e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ y $k\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(f) Calcular:

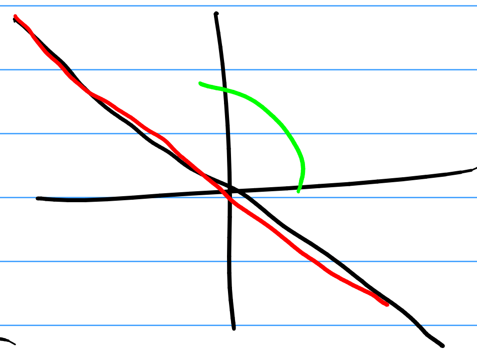
$$\text{(i) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \qquad \text{(ii) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}}$$

$$\frac{r^2 \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)}$$

Fijar θ

$\lim_{r\to 0^+}$



$(x, x+x^2)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+x^2)}{x+x+x^2} = \frac{x^2+x^3}{2x+x^2} = \frac{\cancel{x}(1+x^2)}{\cancel{x}(2+x)} =$$

$$\frac{1}{2}$$