1. Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

(a) x^2+y^2 (b) x^2-y^2 (c) x^2 (d) y/x (e) xy (f) $\max\{x^2,y^3\}$ (g) $\max\{x^2,x+y\}$

$$C_a = \{(x,y) : \max\{x^2,y^3\} = a\}$$

Observemos que $\max\{x^2,y^3\} \geq x^2 \geq 0$

con esto, tenemos que $C_a = \phi \quad \forall a<0$

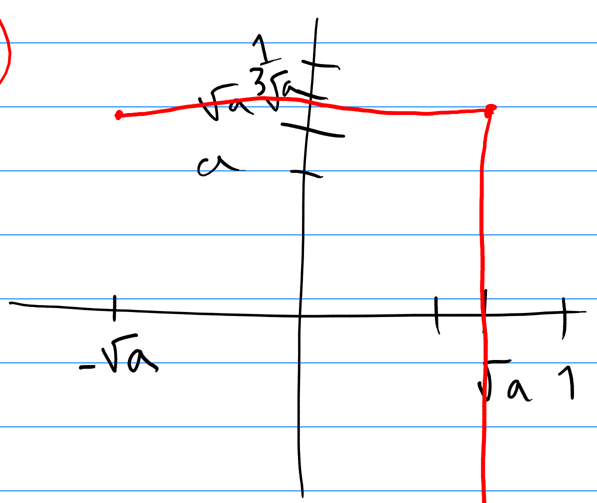
$$C_0 = \{(x,y) : \max\{x^2, y^3\} = 0\}$$
$$= \{(0,y) : y^3 \leq 0\} = \{(0,y) : y \leq 0\}$$

Para $a<1$ se cumple:

$$a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$$

$$C_a = \{(x,y) : \max\{x^2,y^3\} = a\}$$
$$= \{(\sqrt{a}, y) : y < \sqrt[3]{a}\} \cup \{(x, \sqrt[3]{a}) : |x| < \sqrt{a}\}$$

$a = \frac{1}{2}$



Practicar

2. Hallar el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } \frac{x}{x-y-z} \quad \text{(b) } \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2) \quad \text{(c) } \frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2} \quad \text{(d) } \frac{x+y}{\min\{x,y\}}$$

3. Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(b) } \log\left(\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad \text{(c) } \cosh\left(x^2-y^2\right) \quad \text{(d) } \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\text{(e) } \arccos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \quad \text{(f) } \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{(g) } x^{(y^2)}$$

4. Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0,0))$ de centro $(0,0)$ y radio R. Mediante el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, se obtiene $g: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, donde $V = (0,R)\times[0,2\pi)$.

(a) Probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ sii $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $|g(r,\theta) - L| < \varepsilon\ \forall\, r \in (0,\delta), \theta \in [0,2\pi)$.

(b) Probar que si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$ entonces $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta) = L\ \forall\, \theta \in [0,2\pi)$.

(c) Se consideran las funciones f siguientes

$$\text{(i) } f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(ii) } f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{(iii) } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{r\to 0^+} g(r,\theta)$, éste último en función de $\theta \in [0,2\pi)$.

(d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

(e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h: (0,R) \to \mathbb{R}$ y $k: [0,2\pi) \to \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\lim_{r\to 0^+} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(f) Calcular:

$$\text{(i) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \text{(ii) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cdot\cos\theta)^2\, r\operatorname{sen}\theta}{(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\, \overbrace{\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}^{\in[-1,1]} = 0$$

$$g(\theta) = \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad \cos^2(\theta) \in [0,1]$$
$$\mathrm{sen}(\theta) \in [-1,1]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r} \underbrace{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}_{\text{acotado}} = 0$$

5. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$\text{(a) } \underbrace{f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} \qquad \text{(b) } f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

6. (a) Probar que si $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

(b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x,y) \to (0,0)$:

$$\text{(a) } x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad \boxed{\text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4}} = y\,\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

7. Decidir si los límites siguientes existen y en caso afirmativo calcularlos.

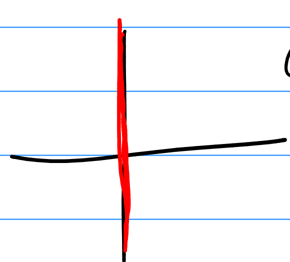
$$\text{(a) } \lim_{(x,y,z)\to(2,5,3)} \frac{x-y}{x^2+y-z} \qquad \text{(b) } \lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)} \qquad \text{(c) } \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

8. Calcular:

$$\text{(a) } \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \qquad \text{(b) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log|y| \qquad \text{(c) } \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

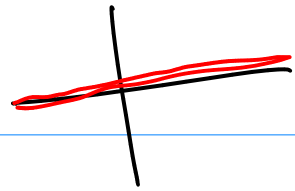
$$\text{(d) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad \text{(e) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \qquad \text{(f) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \leftarrow$$ Queremos ver que no tiene límite en $(0,0)$



Calcular la direccional $(0,y)$

$$\lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

con esto $\nexists$ lim

(b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$\text{(a) } x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ es acotada $\forall\, (x,y)\neq(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

¿ $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ está acotada ?

$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$$\frac{r\cos\theta\, r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^4\operatorname{sen}^4\theta}$$

$$= \frac{r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^2(\cos^2 + r^2\operatorname{sen}^4\theta)}$$

$$= r\left(\frac{\cos\theta \,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^4\theta}\right)$$

$$\lim_{r\to 0} \cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^4\theta = \cos^2\theta$$

$$x^2+y^4$$

$\boxed{\text{En un entorno de } 0 \quad y\in[-1,1]\setminus\{(0,0)\} \quad y^4 < y^2}$

TRUCO:

$$\boxed{(x-y^2)^2 = x^2 - 2xy^2 + y^4}$$

$$\to \quad -x^2 - y^4 + (x-y^2)^2 = -2xy^2$$

$$\to \quad \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2} - \frac{(x-y^2)^2}{2} = xy^2}$$

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{2} \leq xy^2 \leq (x^2+y^4)\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}\right) = -\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\leq \frac{(x^2+y^4)\frac{1}{2}}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$$

Acabamos de probar que $\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ está acotado en en entorno de 0

$|y| \leq 1 \qquad |x| \leq 1$

$y^4 \leq y^2 \quad , \quad x^4 \leq x^2$

$$\text{conozco} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \text{conozco}$$

$$x^2+y^4 < x^2+y^2 \rightarrow \frac{xy^2}{x^2+y^2} < \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$x^4+y^4 < x^2+y^4 \rightarrow \frac{xy^2}{x^2+y^4} < \frac{xy^2}{x^4+y^4}$$

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \underbrace{\frac{xy^2}{x^4+y^4}}$$

No nos sirvió

$\downarrow$

$$\frac{r\cos\theta \, r^2 \operatorname{sen}\theta}{r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta)} = \frac{r^3}{r^2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta = \underbrace{r\cos\theta \operatorname{sen}\theta}_{\text{Esto acotado}}$$

$$\rightarrow \frac{xy^2}{x^4+y^4} \sim \frac{r^3}{r^4}\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\frac{1}{r}\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(x^2+y^4)}{x^2+y^4} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^4)}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| < \frac{1}{2}$$

7. Decidir si los límites siguientes existen y en caso afirmativo calcularlos.

$$\text{(a)} \lim_{(x,y,z)\to(2,5,3)} \frac{x-y}{x^2+y-z} \quad \text{(b)} \lim_{(x,y,z)\to(1,0,1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+e^y-z)}{x^2+\tan(\frac{1}{\cos(xyz)})} \quad \text{(c)} \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz-z^4}{x^4+y^4+z^4}$$

8. Calcular:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2+xy+1}{x^2-x-y} \quad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,y\,\log|y| \quad \text{(c)} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-y^2}$$

$$\text{(d)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{(e)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2} \quad \text{(f)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^3y}$$

9. Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{ax+y+by^2}{\operatorname{sen} y+\log(1+x)} \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

s límites de las siguientes funciones para $(x,y)\to(0,0)$:

$$\text{(a) } x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \quad \text{(b) } \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{(c) } \frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$