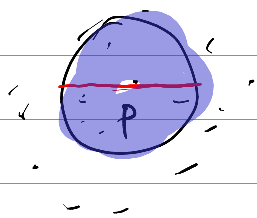
3. *a*) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.
   b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A - p$ es abierto.

4. Sean A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Hallar $int(C)$, $\overline{C}$, y ∂C.

$a, b \in \mathbb{Q}$ $\quad a < b \quad$ $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que

$a < r < b$

$p \in A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$



$p = (x_1, y_1)$

$B(p, \varepsilon) = \{(x,y) : \|(x,y) - (x_1, y_1)\| < \varepsilon\}$

entre x_1 y $x_1 + \varepsilon$ $\exists$ r_1 irracional

" y_1 y $y_1 + \varepsilon$ $\exists$ r_2 irracional

$(r_1, r_2) \notin A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ $\qquad (r_1, y_1)$

$(r_1, r_2) \in B(p, \varepsilon)$

5. Sean A y B dos conjuntos $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto suma $A + B$ de la siguiente forma:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

   a) Demostrar que si A es abierto $A + B$ es abierto.

   b) ¿Qué se puede decir de $A + B$ si A es cerrado?

$a \in A$

$B(a, \varepsilon) \subset A$

$(a+b) \in A + B$

$B(a+b, \varepsilon)$

6. Probar los siguientes resultados.

   a) A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$.

   b) $int(A) = \bar{A} - \partial A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el "mayor" conjunto abierto incluido en A).

   c) A es cerrado sii $\partial A \subset A$ sii $A' \subset A$.

   d) $\bar{A} = A \cup \partial A$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el "menor" cerrado que contiene a A).

   e) A' es un conjunto cerrado.

7. *a*) Probar que la unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

   b) Probar que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

   c) ¿Es cierto que la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto?

   d) Extraer conclusiones sobre la unión e intersección de conjuntos cerrados.

7) $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia de abiertos

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es abierto

b) $A_1 — A_n$ abiertos

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto

$x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \rightarrow x \in A_i \ \forall i = 1 — n$

$\rightarrow B(x, \varepsilon_i) \subset A_i$

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, — \varepsilon_n\}$

$\underline{B(x, \varepsilon)} \subset A_i \ \forall i \rightarrow \underline{B(x,\varepsilon)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Considero $\{(-1/n, 1/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) = \{0\}$$

$|x| > 0$, para algun n $\quad x \notin (-1/n, 1/n)$

8. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en $\mathbb{R}^2$. En caso de no convergencia, determinar la existencia de subsucesiones convergentes y calcularlas

$$a_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n}\right), \quad b_n = (e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n), \quad c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n}\right).$$

$$d_n = \left(n((-1)^n + 1), e\right), \quad e_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

9. *a*) Sea x_n una sucesion en $\mathbb{R}^n$. Probar que si una sucesión tiene límite, entonces toda subsucesión tiene el mismo límite.

   b) Sea x_n una sucesion en $\mathbb{R}^2$, tal que $x_n \to p$ y sea $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Hallar $int(A)$, $\overline{A}$, A', ∂A.

   c) Demostrar que un punto a es de acumulación de un conjunto X sii existe una sucesión $(x_k) \subset X - \{a\}$ que converge a a.

cuando x_n no es constante tenemos:

9) b) $x_n \to p \qquad x_n \in \mathbb{R}^2 \ \forall n$

$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathring{A} = \phi$, $\overline{A} = A \cup \{p\}$

$A' = \{p\}$

$\partial A = A \cup \{p\}$

si $x_n = p \ \forall n \to A' = \phi$

$\overline{A} = \partial A = A = \{p\}$

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, se define el conjunto de nivel a como:

$$C_a = \{p \in U : f(p) = a\} \quad = f^{-1}(a)$$

1. Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } x^2+y^2 \quad \text{(b) } x^2-y^2 \quad \text{(c) } x^2 \quad \text{(d) } y/x \quad \text{(e) } xy \quad \text{(f) } \max\{x^2, y^3\} \quad \text{(g) } \max\{x^2, x+y\}$$

2. Hallar el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } \frac{x}{x-y-z} \quad \text{(b) } \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2) \quad \text{(c) } \frac{x+y+z}{1-x^2-y^2-z^2} \quad \text{(d) } \frac{x+y}{\min\{x,y\}}$$

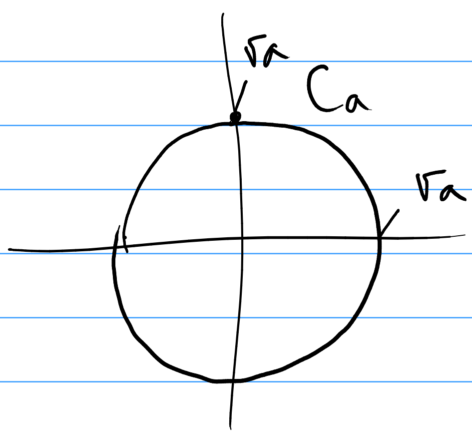
a) $x^2+y^2 \geqslant 0$, $\to$ $a<0$ $f^{-1}(a) = \phi$

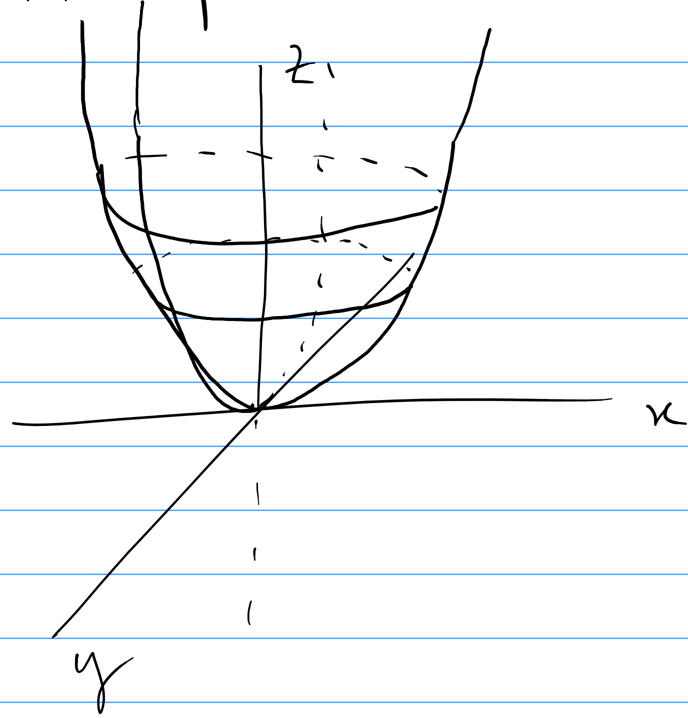
$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dominio $\mathbb{R}^2$

$C_a = \{(x,y) : x^2+y^2 = a\}$

es una cfa. de radio $\sqrt{a}$





$(x, y, f(x,y))$

b)

$g(x,y) = x^2 - y^2$, $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R}^2$

$C_a = \{(x,y) : x^2 - y^2 = a\}$

$a = 0 \Rightarrow C_0 = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\}$

$$C_0 = \{ (x,y) : x^2 = y^2 \}$$

$$C_0 = \{ (x,y) : x = \pm y \}$$

$a > 0$

$$x^2 - y^2 = a$$

$$x^2 = \overbrace{y^2 + a}^{>0}$$

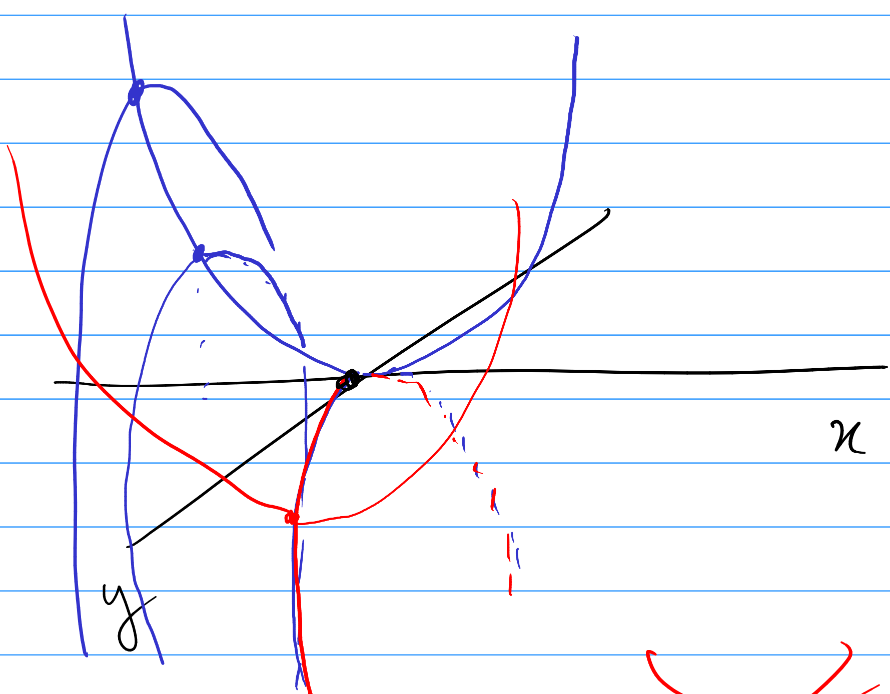
$$x = \pm\sqrt{y^2 + a}$$

$$C_a = \{ (\pm\sqrt{y^2+a}, y) \} \quad (\sqrt{y^2+a})^2 - y^2 = y^2 + a - y^2 = a$$

$a < 0$, $x^2 - y^2 = a$

$$x^2 - a = y^2, \quad y = \pm\sqrt{x^2 - a}$$

$$C_a = \{ (x, \pm\sqrt{x^2-a})$$



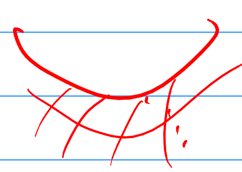
$x^2 - y^2$

$x = 1$

$1 - y^2$

$y = 1$

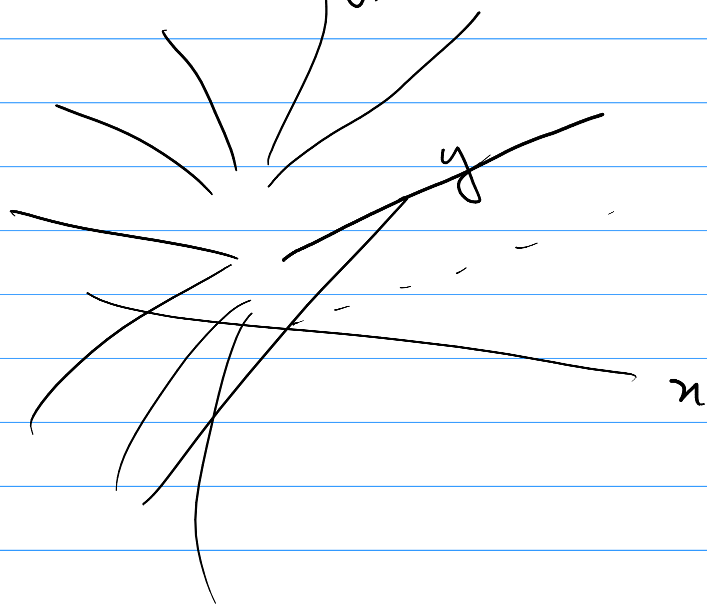
$x^2 - 1$



$f(x,y) = y/x \qquad \mathrm{Dom}(\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\})$

$C_0 = \{(x,y) : y/x = 0\} = \{(x,0)\}$

$C_a = \{(x,y) : y/x = a\} = \{(x,ax)\}$



$\max\{x^2, y^3\}$

$x^2 - y^3 = 0 \Rightarrow x^2 = y^3$

$C_0 = \{(x,y) : \max\{x^2, y^3\} = 0\}$

$= \{(0,y) : y < 0\} \to y^3 < 0 = x^2\}$