2. Se definen los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2, 1<y<3\},$$
$$B = A_1\cap\mathbb{Q}^2$$
$$A_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$
$$A_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1, (x,y)\neq(0,0)\},$$
$$C = A_3\cap\mathbb{Q}^2$$
$$A_4 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}$$
$$A_5 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = (-1)^n+\tfrac{1}{n}, y=1, n\ge 1\},$$
$$A_6 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z<1, x>0, y>0, z>0\}$$
$$A_7 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+1\le z\}$$

a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.

b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.

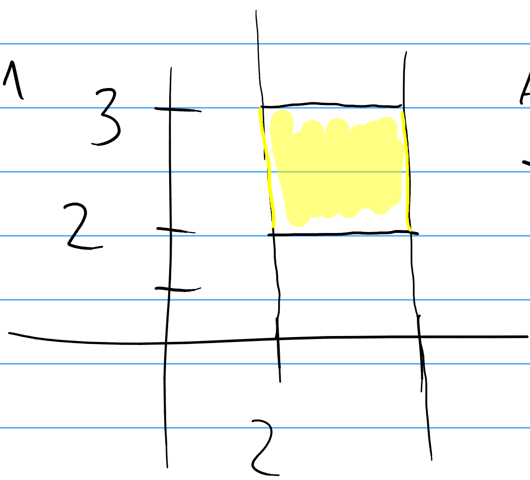
c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

d) Indicar si son abiertos.

e) Indicar si son cerrados.

f) Indicar si son compactos.

A_1



$\mathring{A}_1 = \{(x,y): 1<x<2,\ 2<y<3\}$

$\overline{A_1} = \{(x,y): 1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3\}$

$\overline{A_1} = A_1\cup\partial A_1$

$x\in A_1' \iff \forall\varepsilon>0,\ B^*(x,\varepsilon)\cap A_1\neq\emptyset$

$A_1' = \overline{A_1}$

A_1 no es abierto, $(1, 5/2)\in A_1$ $\forall\varepsilon>$ $B((1,5/2),\varepsilon)\not\subset A_1$

Def abierto: A es abierto si $\forall x\in A$ $\exists\,\varepsilon>0$ $B(x,\varepsilon)\subset A$

Def cerrado: A es cerrado si A^c es abierto

A^c no es abierto por un argumento análogo

$B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 2 < y < 3\}$

$B^\circ = \{x \in A_2 : x \text{ es interior}\}$

$= \{x \in A_2 : \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subsetneq A_2\} = \emptyset$

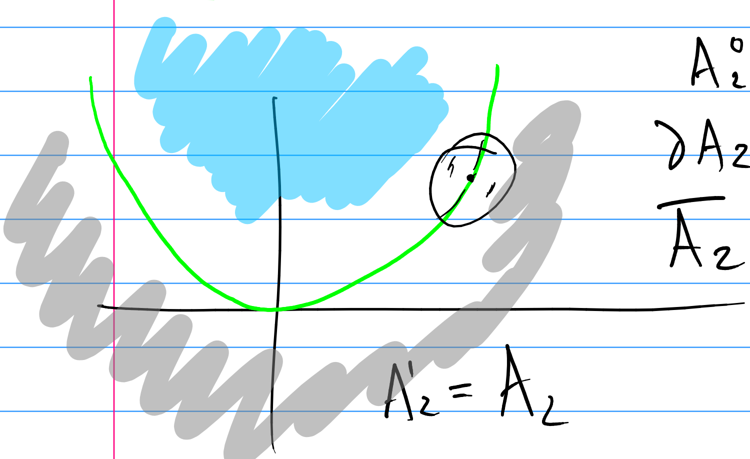
Cualquier bola $B(x,r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2) \neq \emptyset$

$\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq 3\}$

$\overline{B} = B \cup \partial B = \partial A_2 \qquad (B \subset \partial B)$

B no es abierto ni cerrado.

$A_2 = \{(x,y) : y = x^2\}$



$A_2^\circ = \emptyset$

$\partial A_2 = A_2$

$\overline{A_2} = A_2 \cup \partial A_2 = A_2$

$A_2' = A_2$

$A_2^c = \{(x,y) : y \neq x^2\} = \{(x,y) : y < x^2\} \cup \{(x,y) : y > x^2\}$

$D = \{(x,y) : y < x^2\}$ es abierto

$(a,b) \in D$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y$

es continua, $D = f^{-1}((0,+\infty))$

$(x,y) \in D \qquad f(x,y) = r$

Por continuidad para $\varepsilon = r/2$

$\exists\, \delta : \quad f((x',y')) \in B(r, r/2) \subseteq \mathbb{R}$

$\forall\, (x',y') \in B((x,y), \delta)$

Con esto probamos que $B((x,y),\delta) \subseteq D$

Podemos concluir que A_2^c es abierto

A_2 es cerrado

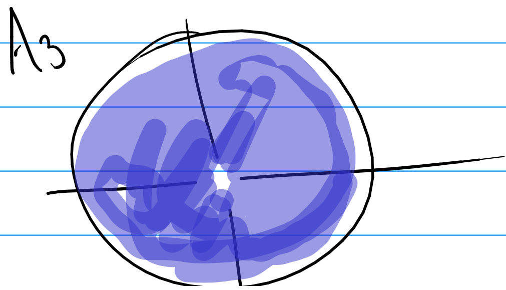
A_2 no es acotado, no puede ser compacto.

$A_3 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1, \ (x,y) \neq (0,0)\}$

A_3 es abierto $\quad A_3 = \mathring{A}_3$

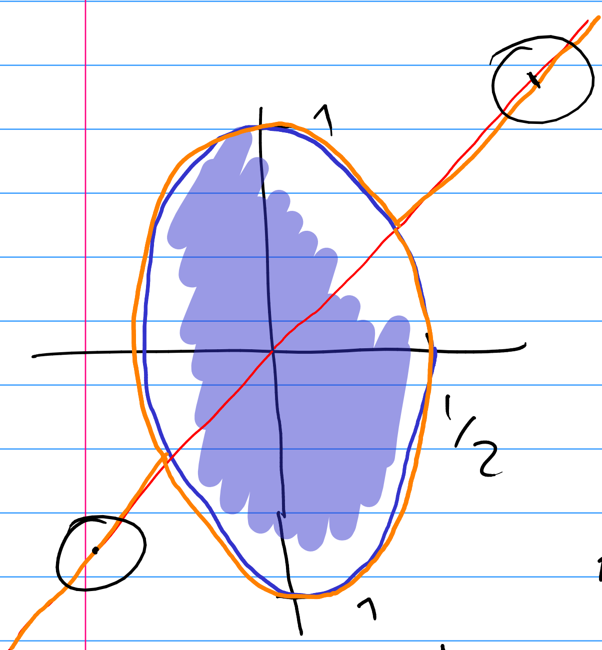
$\partial A_3 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$

$$A_3' = A_3 \cup \partial A_3 = \overline{A_3}$$



2. Se definen los siguientes conjuntos:

$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$,
$B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$
$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$
$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\}$,
$C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$
$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$
$A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\}$,
$A_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
$A_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$



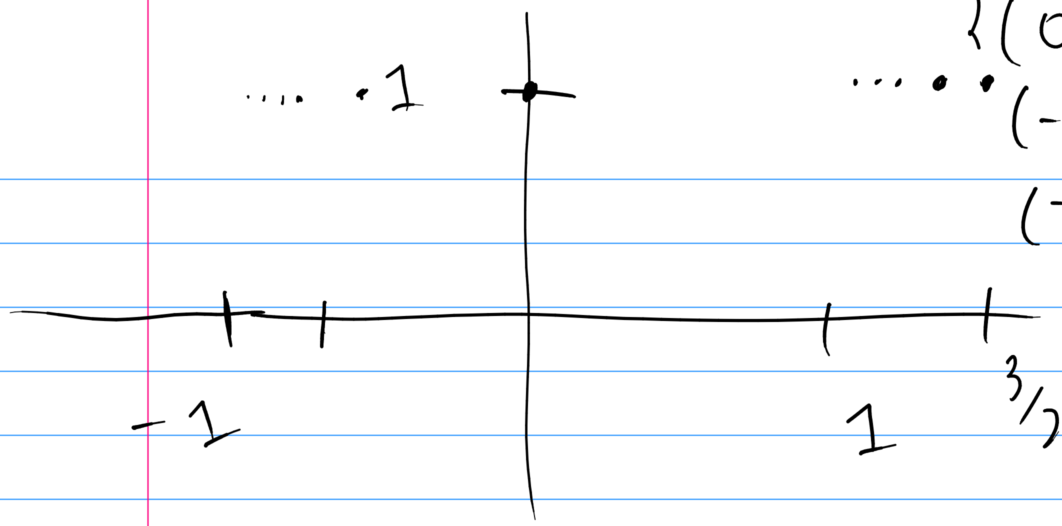
$$A_4^\circ = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\partial A_4 = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 = 1\} \cup (\{(x,y) : x = y\} \cap \{2x^2 + y^2 > 1\})$$

$$A_4' = A_4 \cup \partial A_4$$

A_4 no es ni abierto ni cerrado

$$A_5 = \{(x,y) : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1\}$$



$\{(0,1),(3/2,1),(-2/3,1),(5/4,1),(-4/5,1),(7/6,1)\} \subset A_5$

$A_5^\circ = \phi$

$(A_5)' = \{(-1,1),(1,1)\}$

$\partial A_5 = A_5 \cup \{(-1,1),(1,1)\}$

A_5 no es cerrado ni abierto

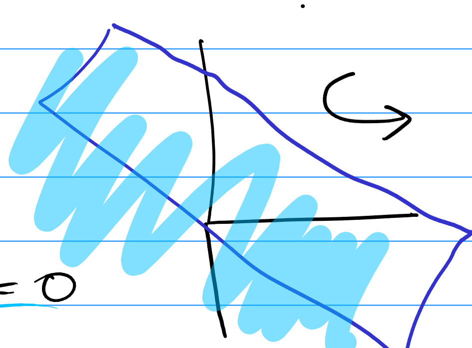
A_5^C tiene el punto $(1,1)$ y cualquier

bola $B((1,1),\varepsilon) \cap A_5 \neq \phi$, $(A_5^C)^\circ \neq A_5^C$

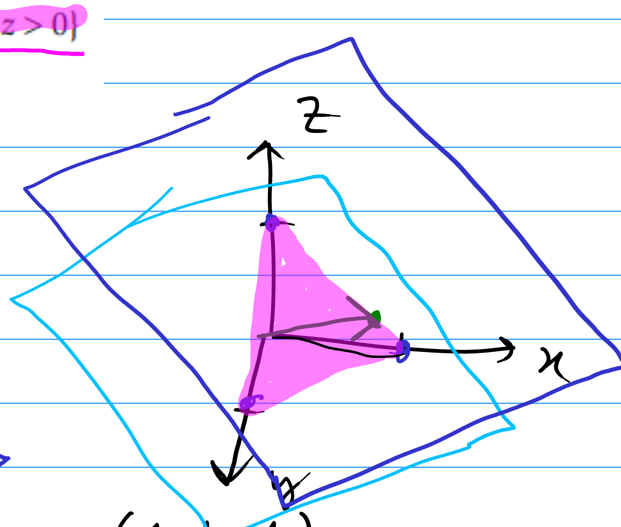
- un punto x_0 es *frontera* de A sii toda bola interseca A y A^C (es decir: $\forall \delta > 0$, tenemos que $A \cap B(x_0,\delta) \neq \emptyset$, y $A^C \cap B(x_0,\delta) \neq \emptyset$).

$A_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$
$A_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+1 \leq z\}$

$A_6 =$



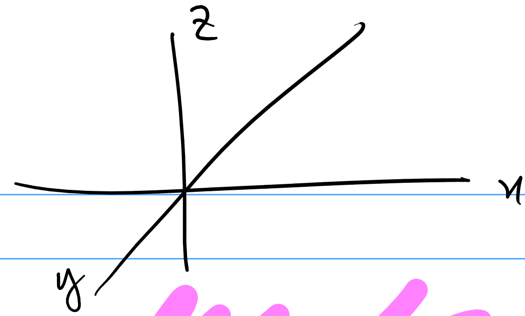
$x+y+z=0$



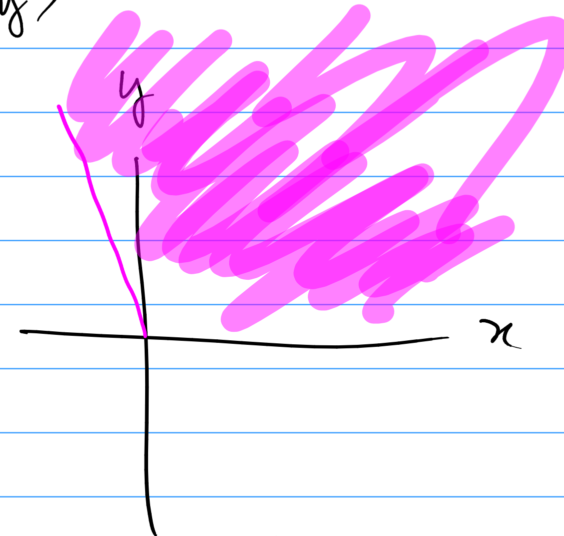
$(1,1,1)$

$A_6^{\circ} = A_6$

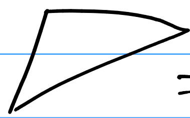
A_6 es abierto



$\partial A_6 =$ caras del tetraedro



La cara de abajo



$= \{(x,y,z)$

$z=0 \quad x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \}$

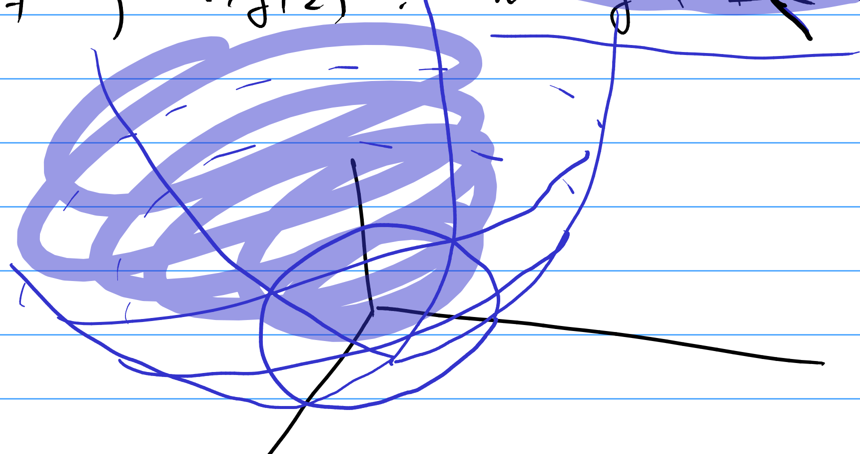
$A_6' = A_6 \cup$ "caras"

$\qquad\qquad\quad \| $

$\qquad\qquad\ \partial A_6$

$\overline{A_6} = A_6'$

$A_7 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+1 \le z\}$



$x=0$

$y^2 < z-1$

A_7 es cerrado

y

$A_7^c = \{x^2+y^2+1 > z\}$