Ej. 5) - f, g funciones en $[a, +\infty)$
- f', g' son integrables en $[a, +\infty)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) g(x) = L \in \mathbb{R}$

- $\int_a^{+\infty} f'(x) g(x) dx$ converge $\Leftrightarrow \int_a^{\infty} g'(x) f(x) dx$ converge

Integrar por partes

$$\int_a^x f(t) g(t) dt = \left(f(t) g(t)\right)\Big|_a^x - \int_a^x g'(t) f(t) dt$$

b) Clasificar:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

$f(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad g(t) = \cos t$

$f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ $\qquad g'(t) = \operatorname{sen} t$

$$\lim_{t \to \infty} -\frac{\cos t}{t^2} = 0$$

$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ converge $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{-\cos t}{t^2} dt$ converge

$\int_1^{\infty} \left| -\frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ que converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

converge

$\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ no esta definido en 0

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1}$$

bien sabido

$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} < M\right)$

Tenemos que $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es continua y acotada en el intervalo $(0,1]$, integra finito

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt < M$$

6) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$ ← Queremos clasificar

Observemos que $f(x) = e^{-x^2}$ es par $(f(x) = f(-x))$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\left(\int_0^1 e^{-x^2} + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\right)$$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ converge.

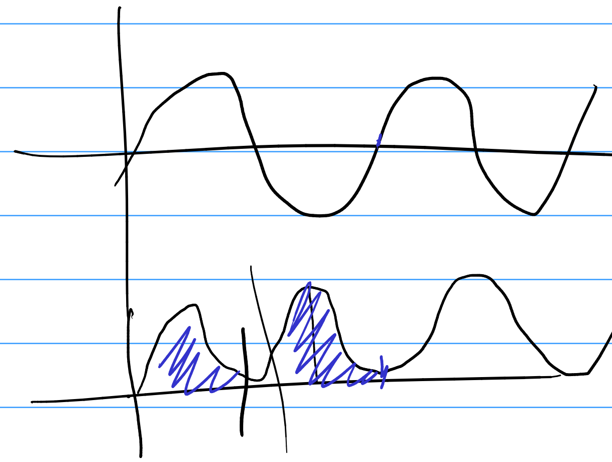
Converge

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$e^{x^2} \geq x \quad \forall x \geq 1$

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{e^{x^2}}$

e) Queremos classificar



$$\int_0^{+\infty} \text{sen}^2(t)\,dt$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)\,dt}_{=\,C} > 0, \quad \text{sen}^2(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in (0, 2\pi)$$

$\text{sen}^2(1) > 0$

$\text{sen}(t) = \text{sen}(2\pi + t) \quad \forall t$

$$\int_0^{+\infty} \text{sen}^2(t)\,dt = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{i2\pi}^{i2\pi+2\pi} \frac{\text{sen}^2(t)}{t} = \sum_{i=0}^{+\infty} c = +\infty$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} c = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} c = \lim_{n\to+\infty} n \cdot c = +\infty$$

$\int_0^{+\infty} \text{sen}^2(t)\,dt$ diverge.

$$\lim_{t\to\infty} \text{sen}^2(t) \neq 0$$

6) L) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 e^{\frac{-1}{x-1}}$$

$u = \dfrac{-1}{x-1}$

$du = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1} \int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{t-1}\right)^2 e^{\frac{-1}{t-1}}\,dt$$

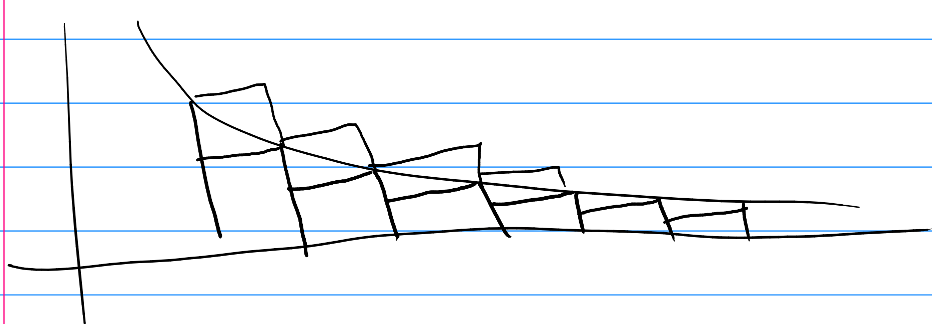
$$= \lim_{x\to 1^-} \int_{1/2}^{-\frac{1}{x-1}} e^u\,du = \lim_{x\to 1^-} \left(e^u\right)\Big|_{1/2}^{-\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty \qquad = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{e^{\frac{-1}{x-1}}}_{\to +\infty} - e^{1/2}$$

---

8) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2} \longleftrightarrow \int_1^{\infty} x e^{-x^2}\,dx$

converge $\qquad$ converge



$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$u = x^2$

$du = 2x$

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{y \to +\infty} \int_1^{y} x e^{-x^2} dx$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \int_1^{y^2} e^{-u} du = \lim_{y \to +\infty} \left(-e^{-u}\right) \Big|_1^{y^2}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} -e^{-y^2} + e^{-1} = e^{-1}$$

converge

9) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

$u = \log(x)$

$du = \frac{1}{x}$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{y \to +\infty} \int_2^{y} \frac{1}{x \log(x)} dx = \lim_{y \to +\infty} \int_{\log(2)}^{\log(y)} \frac{1}{u} du$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left[\log u\right] \Big|_{\log 2}^{\log(y)}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \log(\log(y)) - \log(\log(2)) = +\infty$$

Nota: en $\mathbb{R}^n$, a menos que se aclare lo contrario, asumiremos que estamos trabajando con la distancia euclídia.

1. *a*) Una función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma si satisface las siguientes propiedades:
   - (I) $N(u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$ y $N(u) = 0$ sí y sólo sí $u = \vec{0}$
   - (II) $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$
   - (III) $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$

   Investigar si las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son normas
   - (i) $N((x, y)) = |x| + |y|$,
   - (ii) $N((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
   - (iii) $N((x, y)) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$,
   - (iv) $N((x, y)) = |x + y|$.

   $\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{x^p + y^p}$

   b) Para aquellas que sean normas, dibujar la bola de centro en el origen y radio 1. Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro $(3, 4)$ y radio 2: $(3, 4), (4, 5)$.

   c) Decimos que dos normas N_1, N_2 son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$. Probar que aquellas funciones que son normas de este ejercicio son equivalentes dos a dos.

$N((x,y)) = |x+y|$

$N((\underline{1,-1})) = |1-1| = |0|$ $\qquad (1,-1) \neq (0,0)$

2. Se definen los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\},$$
$$B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$$
$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1, (x,y) \neq (0,0)\},$$
$$C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$$
$$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$$
$$A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = (-1)^n + \tfrac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\},$$
$$A_6 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$
$$A_7 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$$

a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.

b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.

c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.

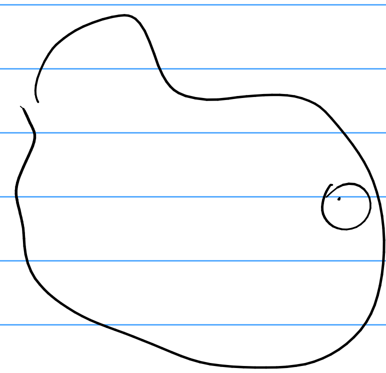
d) Indicar si son abiertos.

e) Indicar si son cerrados.

f) Indicar si son compactos.

Un conjunto A es abierto si $\forall x \in A \ \exists \varepsilon > 0$

: $B(x, \varepsilon) \subset A$



$$\int_1^\infty \frac{\text{sen}^2(t)}{t}\, dt \geq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{\text{sen}^2(t)}{t} \geq \frac{1}{4} \frac{1}{t+1}$$