c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1} = \sum \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{10n+1}$

$\frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{10n+1} n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{e}\right) n}{10n+1}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{10n+1} = \frac{1}{10} \rightarrow$

Por criterio de equivalentes, como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\sum \frac{\log(n+1)-\log n}{10n+1}$ converge

Criterio de equivalentes:
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos.

- *Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, entonces ambas sucesiones son de la misma clase (equivalentes)*
- *Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también.*

Acabamos de aplicar esto para $a_n = \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$

$b_n = \frac{1}{n^2}$

Estudiar convergencia

¿ a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \approx \frac{1}{n}$?

$$a_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+1)} \approx 1$$

Esto nos dice que a_n tiene el mismo comportamiento que b_n, osea diverge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$

Criterio de comparacion con $\dfrac{1}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log(n+1)} = \underline{+\infty}$$

Quiere decir que en el limite $\dfrac{n}{(n+1)\log(n+1)}$

es mas grande que $\dfrac{1}{n+1}$

$\rightarrow \quad \log(n+1) < n \quad$ a partir de cierto n_0

$$(n+1)\log(n+1) < (n+1)\,n$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$$

Como $\displaystyle\sum^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\sum^{\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$ $\quad$ ¿ $\displaystyle\sum \frac{n}{6n-5}$ converge?

$$\lim \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0$$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$ Diverge

1. *a*) Sean $a > 0$ y $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t) \geq 0$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Demostrar que $F(x)$ es creciente y que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff F(x)$ está acotada superiormente.

b) Sea $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$.

i) Probar que sí $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ también converge.

ii) Sí $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge entonces $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge .

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(t) \geq 0 \quad \forall\, t \in [a, +\infty)$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es creciente

Si $x \leq y$ probaremos que $F(x) \leq F(y)$

$x \leq y \Rightarrow \quad y = x + r$, con $r \geq 0$

$$F(y) = \int_a^y f(t)dt = \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{=F(x)} + \underbrace{\int_x^r f(t)dt}_{R}$$

$= F(x) + R \quad , \quad R \geq 0$

Esto prueba que $F(y) \geq F(x)$

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff$ $F(x)$ acotada

$(\Rightarrow)\quad L = \lim\limits_{x \to \infty} \int_a^x f(t) \quad , \quad L < K$ para algun $K \in \mathbb{R}^+$

Si fijo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 1$

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \quad x > x_0 \rightarrow |F(x) - L| < 1$

Sabemos que si $x > x_0$, $L+1$ es cota superior de F

¿Qué paso con $F|_{[a, x_0]}$?

$F(x) \leq F(x_0 + 1) < L + 1 \quad \forall x \in [a, x_0]$

Se concluye que $L+1$ acota F

($\Leftarrow$) F acotada $\Rightarrow \int_a^\infty f(t)\,dt$ converge

$\int_a^\infty f(t)\,dt$ no converge $\Rightarrow F$ no está acotada

Como ya probamos que $\int_a^x f(t)\,dt$ es creciente que $\int_a^\infty f(t)\,dt$ no converga quiere decir que

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

$\forall R > 0 \quad \exists x_0 : \quad F(x) \geq R \quad \forall x \geq x_0$

F no es acotada

b) Sea $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \le f(t) \le g(t)$ para todo $t \ge a$.

i) Probar que sí $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ también converge.

ii) Sí $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge entonces $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge .

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \forall\, t \in [a, +\infty)$$

$$0 \leqslant F(x) \leqslant G(x) \qquad \forall\, t \in [a, +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) \leqslant \lim_{x \to +\infty} G(x)$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

De esto, si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = L$, acota $F \Rightarrow$

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge

2. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^{\alpha}(x)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge $\qquad t^{-2}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left(-t^{-1}\right)\Big|_1^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x^{-1} + 1 = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + 1$$

$$= 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} t^{-\alpha}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(t^{1-\alpha})}{(1-\alpha)}$$

$$= \lim \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

$\int \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge para $\alpha > 1$