$$\sum^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}} \quad ¿\text{converge o diverge?}$$

criterio de comparacion

Si tenemos a_n, b_n sucesiones ≥ 0

tales que $a_n \leq b_n \ \forall n$

Se cumple que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\sum_{n=0} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=0} b_n \text{ diverge}$$

En nuestro caso $a_n = e^{-\sqrt{n+1}}$

para probar que converge hay que dar $b_n \geq e^{-\sqrt{n+1}}$

tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

$\underline{e^{\sqrt{n+1}}} > n^2$ a partir de cierto n_0

se cumple $\boxed{\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n+1}}}} = a_n$

$b_n = \dfrac{1}{n^2}$ tenemos que $\sum^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge

Por lo tanto $\sum^{\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$ converge

Criterio del equivalente

Si a_n, b_n tienen el mismo comportamiento en el límite

Se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo comportamiento.

3) Determinar si converge o diverge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

$\frac{1}{n^2+1}$ tiene el mismo comportamiento asintótico que $\frac{1}{n^2}$

y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3},$$

$\frac{n^2+1}{n^3}$ se comporta como $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\sum^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ también.

$$\sum^{\infty} \frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1}$$

$$\frac{\log(n+1)-\log(n)}{10n+1} = \frac{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{10n+1}$$

Esto en el límite se comporta como $\frac{1}{10n+1}$

o como $\frac{1}{n}$ $\longrightarrow$ la serie diverge

Criterio del Cociente (D'Alambert)

$a_n \geq 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$L < 1$ $\quad \sum^{\infty} a_n$ converge

$L > 1$ $\quad \sum^{\infty} a_n$ diverge

4) a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2(n+1)-1}{\cancel{(\sqrt{2})}^{n+1}}\right)\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}^{n}}}{2(n)-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)-1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$$\rightarrow \sum^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n} \text{ converge}$$

$$\sum^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}}\left(\frac{n^n}{\cancel{n!}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

es bien sabido

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{-1} < 1$$

Criterio de la raíz n-enimo

$a_n \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$L < 1 \quad \sum^{\infty} a_n$ converge

$L > 1 \quad \sum^{\infty} a_n$ diverge

$$\sum^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt[\cancel{n}]{(\sqrt{2})^{\cancel{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$\Rightarrow$ Converge

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n-1} = \underline{\lim_{n\to\infty} (2n-1)^{1/n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\log(2n-1)^{1/n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\underline{\frac{1}{n}\log(2n-1)}} = e^0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2n-1)}{n} = 0$$

(*) Se puede decir que el exponente $\frac{1}{n} \to 0$ y la raíz es lineal $\to \lim \to 1$

6. Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué.

a) $\sum \frac{1}{a_n}$ b) $\sum a_n^2$ c) $\sum \sqrt{a_n}$ d) $\sum \log(1+a_n)$

$$\sum^{\infty} \frac{1}{a_n}, \quad \text{Observar: } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

$\frac{1}{a_n} < a_n \longleftrightarrow a_n > 1$

$\sum^{\infty} a_n^2$ $\quad 1 > a_n > a_n^2$ $\quad \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$$\text{"} \sum^{\infty} a_n > \sum^{\infty} a_n^2 \text{"}$$

a partir de cierto n

$\to \sum^{\infty} a_n^2$ converge

$\lim \frac{a_n^2}{a_n} = 0$, como a_n converge a^2_n también.

c) $\sum \sqrt{a_n}$ ¿converge o diverge?

$$\lim \frac{a_n}{\sqrt{a_n}} = \lim \sqrt{a_n} = 0$$

$$\lim \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \lim \frac{1}{\sqrt{a_n}} \longrightarrow +\infty$$

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

$\sqrt{a_n} = \frac{1}{n}$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ diverge

$a_n = \frac{1}{n^4}$ $\quad \sum \frac{1}{n^4} < \infty$

$\sqrt{a_n} = \frac{1}{n^2}$ $\quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty$

No se puede concluir

$a_n \in \mathbb{R} \ \forall n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ converge