3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

a) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$ b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ c) $a_n = \dfrac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$ d) $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos(n)$ f) $a_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ g) $a_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

a) $a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$

Como $\cos(n)$ esta acotado por arriba y por abajo

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{\cos(n)}{n}\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0$

d) $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

$a_n = \|(\alpha, \beta)\|_n$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

???

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$ Suponemos que $\alpha > \beta$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n\left(1+\frac{\beta^n}{\alpha^n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^n}\cdot\sqrt[n]{\underbrace{1+\frac{\beta^n}{\alpha^n}}_{\lim_{n\to\infty}=1}} = \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha$$

$\alpha=\beta$ $$\sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \sqrt[n]{2\alpha^n} = \sqrt[n]{2}\cdot\alpha \xrightarrow{n} \alpha$$

$$\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n} 1$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ *b)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *c)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n!}$ *e)* $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ *b)* $a_n = (-1)^n n$ *c)* $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ *d)* $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

e) $a_n = n^2\ (1+(-1)^n)$ *f)* $a_n = n^{(-1)^n}$ *g)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$a_1 = \frac{0}{2}$ $a_2 = \frac{2}{2} = 1$

$a_3 = 0$ $a_4 = 1$

$a_5 = 0$ $a_6 = 1$

$0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \cdots 1\,0\,1\,\underbrace{0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0}_{=0} \cdots 0\,0$

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

   a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean 1, 2, 3 y 4. ✓

   b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.

   c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

1

2 1

3 2 1

4 3 2 1

⋮

n n-1 … 3 2 1

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 \qquad a_3 = 2$

$a_4 = 1 \qquad a_5 = 2 \qquad a_6 = 3$

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}+1 & a_{n+1}+1 \leq a_k \\ & k < n+1 \\ 1 & \end{cases}$$

Sabemos que $\mathbb{Q}$ son un conjunto numerable, o sea $\exists\ x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biyectiva

x_n sucesión de todos los racionales

En particular, para cualquier $K \in \mathbb{N}$ $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de x_n ($y_n \in \mathbb{Q}\ \forall n$) tal que $y_n \to K$

c) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $\qquad$ a_n de la parte b

$\forall K \in \mathbb{N}\ \exists\ c_n^{(K)}$ subsucesión de a_n

tal que $\lim_{n\to\infty} c_n^{(K)} = K \to d_n^{(K)} = \dfrac{1}{c_n^{(K)}}$

$d_n^{(K)} \to \frac{1}{K}$

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ tiene al 0 como punto de acumulacion, va a existir alguna subsucesion que converga a 0.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que f está acotada si y solamente si para toda sucesión a_n, la sucesión $b_n = f(a_n)$ está acotada.

10. Probar que si a_n converge a 0, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^2 < |a_n|$ para todo $n \geq n_0$.

11. Probar que si a_n converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es contínua en α, entonces $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

9) f acotada $\Longleftrightarrow$ $\forall a_n$ $b_n = f(a_n)$ acotada

f esta acotada, $\exists c > 0, c \in \mathbb{R}$ $|f(x)| < c$ $\forall x$

$\Rightarrow$ $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesion de reales se cumple que $|f(a_n)| < c$

$\forall a_n$ sucesion de numeros reales $b_n = f(a_n)$ esta acotada es decir $\forall n$ $|f(a_n)| < c$ para algun $c \in \mathbb{R}^+$

Con estas hipotesis queremos probar que $|f(x)| < K$ para algun K

$\forall n \; |f(a_n)| < c \Rightarrow \forall x \; |f(x)| < K$

Si f no esta acotada, es decir $\forall K \in \mathbb{R}^+$

$\exists K_x : f(K_x) > K$

Entonces K_x no es acotada por definicion.

10) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Queremos probar que $\exists n_0 : \forall n > n_0$

$\underbrace{a_n^2 < |a_n|}$

se cumple si $|a_n| < 1$

$\exists$ n_0 tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| < 1$ por definicion de $\lim_{n\to\infty} a_n$

10) Tenemos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcion continua en α y a_n con limite α!

Entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$

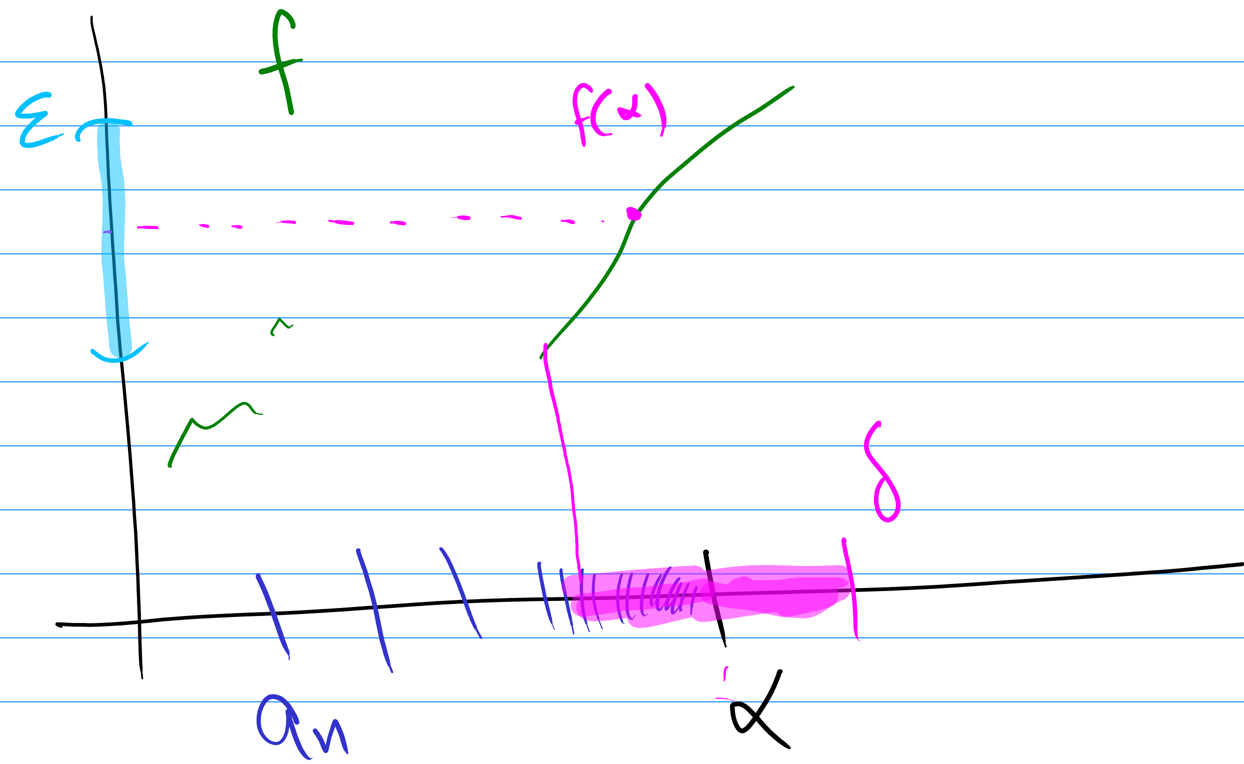
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que

$\underbrace{|x - \alpha| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$

fijado $\varepsilon > 0$ $\exists$ n_0 tal que $|a_n - \alpha| < \delta$ $\forall n > n_0$

Entonces $|f(a_n) - f(\alpha)| < \varepsilon$ $\forall n > n_0$

Es decir $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$



$a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = x$

$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

$x = \sqrt{2+x} \xrightarrow{?} x^2 = 2 + x$

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

$\lim a_n = 2$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > 0$

$\forall n > n_0$ $|a_n - 0| < \varepsilon$

$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{10} \rightarrow 10 < n$