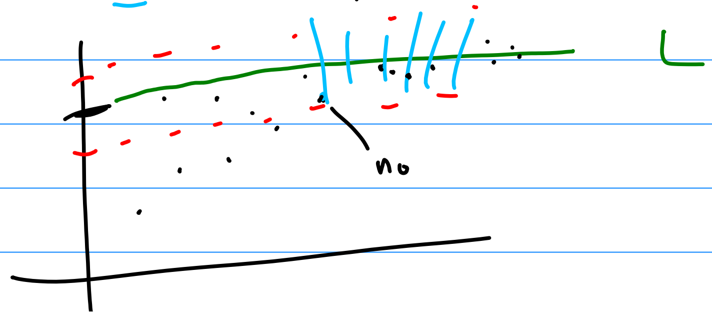
Definición de convergencia de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ si $\forall\, \varepsilon>0$

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n>n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$



2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.
   a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A + B$
   b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$
   → c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$
   → d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$
3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

a) $c_n = a_n + b_n$ queremos probar que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A+B$

Sabemos que $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A}$ $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B}$

$\exists\, n_1$ tal que si $n>n_1 \Rightarrow \|a_n - A\| < \varepsilon/2$

$\exists\, n_2$ tal que si $n>n_2 \Rightarrow \|b_n - B\| < \varepsilon/2$

Quiero probar: dado $\varepsilon>0$

$\exists\, n_0$ tal que si $n>n_0$ $\|c_n-(A+B)\| < \varepsilon$

$\|c_n-(A+B)\| = \|a_n+b_n-(A+B)\|$

$\|(a_n - A) + (b_n - B)\| \leqslant \|a_n - A\| + \|b_n - B\| = (*)$

si $n > n_1$ y $n > n_2$ entonces $(*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$n_0 = \sup\{n_1, n_2\}$

b) Definimos $\overline{a_n} = \lambda a_n \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Queremos probar: $\lim_{n \to \infty} \overline{a_n} = \lambda A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0$ tal que si $n > n_0 \quad |\overline{a}_n - \lambda A| < \varepsilon$

fijamos $\varepsilon > 0$ cualquiera

como $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ sabemos que $\exists\, n_1 : n > n_1$

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

$$\|\overline{a}_n - \lambda A\| = \|\lambda a_n - \lambda A\| = \|\lambda(a_n - A)\|$$

$$= |\lambda| \|a_n - A\| < \cancel{|\lambda|} \left(\frac{\varepsilon}{\cancel{|\lambda|}}\right) = \varepsilon$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ *b)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *c)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n!}$ *e)* $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ *b)* $a_n = (-1)^n n$ *c)* $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ *d)* $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

e) $a_n = n^2\,(1+(-1)^n)$ *f)* $a_n = n^{(-1)^n}$ *g)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

4) a) Queremos hallar n_0 para que $n > n_0 \quad |a_n| < 1$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 1 \longrightarrow \frac{1}{n} < 1 \rightarrow 1 < n$$

Para $\varepsilon = 1 \quad n_0 = 1$

$\varepsilon = 0.1 = \frac{1}{10}$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \rightarrow 10 < n$$

Para $\varepsilon = 1/3$ $n_0 = 10$

e) $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^3+1} \sim \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^3}$

$$\sim \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$$

Queremos encontrar para $\varepsilon = \frac{1}{100}$ n_0

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2n}{n^3+1} < \frac{1}{100}$$

$$\rightarrow 2n \cdot 100 < n^3 + 1$$

$$200 < n^2 + 1/n$$

$$n_0 = \sqrt{200} \rightarrow n > n_0$$

$$n^2 + \frac{1}{n} = 200 + \frac{1}{\sqrt{200}} > 200$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ d) $a_n = \frac{1}{n!}$ e) $a_n = \frac{2n}{n^3+1}$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ b) $a_n = (-1)^n n$ c) $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ d) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$

e) $a_n = n^2\,(1+(-1)^n)$ f) $a_n = n^{(-1)^n}$ g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

Encontrar n_0 para $\varepsilon = \frac{1}{1000}$

$$\|a_n - 1\| < \varepsilon \rightarrow \left\| \frac{n}{n+1} - 1 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{n+1-1}{n+1} - 1 \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cancel{-1} \right\| < \varepsilon$$

$$\left\| \frac{-1}{n+1} \right\| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$$

$$\frac{(n+1)}{1000} > 1 \rightarrow \frac{n}{1000} > 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$$

$$n > 999$$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ *b)* $a_n = (-1)^n n$ *c)* $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ *d)* $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$

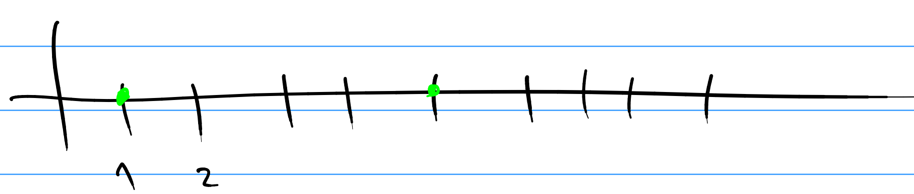
e) $a_n = n^2 \, (1+(-1)^n)$ *f)* $a_n = n^{(-1)^n}$ *g)* $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

$$a_n = (-1)^n \qquad b_n = a_{2n} = 1$$

$$c_n = a_{2n-1} = -1$$

$$a : \mathbb{N} \rightarrow X \qquad a_n = a(n)$$

$$B \subseteq \mathbb{N} \qquad a|_B : B \rightarrow X$$



$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \qquad a_1 = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$a_2 = \frac{1+1}{2} = 1$$

$a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0$

Podemos definir $b_n = a_{2n-1} = 0$

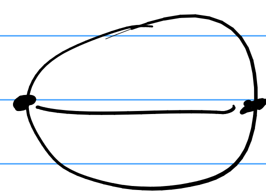
$c_n = a_{2n} = 1$

$n^{(-1)^n}$ $\qquad (-1)^n$ pares -1

impares 1

$$n^{(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pares} \longrightarrow 0 \\ n & \text{impares} \longrightarrow \infty \end{cases}$$

c) $3^{\cos(n\pi)}$



$\cos(n\pi)$ — $n=1$ $\quad \cos(\pi) = -1$

$\cos(2\pi) = 1$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{impares} \\ 1 & \text{pares} \end{cases}$$

$$3^{\cos(n\pi)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{impares} \\ 3 & \text{pares} \end{cases}$$

$$3^{\cos(n\pi)} = 3^{(-1)^n}$$