4. *a*) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$
2) $y'' + y' = 0$
3) $y'' + 4y' + 5y = 0$

b) Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2.$
b) $y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11.$
c) $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
d) $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0.$

Sol de la forma $e^{t\lambda}$ con λ : $\chi(\lambda) = 0$

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' - 2y = 0$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

7. Hallar las constantes a y b reales para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

Queremos que $y(x) = e^x$ sea. Sol de $y'' + ay' - 2y = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda - 2 \qquad \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4(2)}}{2}$

Nos dice que $\chi(1) = 0 = 1 + a - 2 \longrightarrow a = 1$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \qquad \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$

Las soluciones son a ser:

$K_1 e^x + K_2 e^{-2x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$y(0) = y'(0) = 1$

$y(0) = K_1 e^0 + K_2 e^0 = K_1 + K_2 = 1$

$y'(0) = K_1 e^0 - 2K_2 e^0 = K_1 - 2K_2 = 1$

$K_1 = 1 + 2K_2 \longrightarrow 1 + 2K_2 + K_2 = 1$

$3K_2 = 0$

$K_1 = 1$

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' - 2y = 0$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

7. Hallar las constantes a y b reales para que $y(x) = e^{2x} \cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

$2+i, \quad 2-i$

$$2\underbrace{e^{2x}\cos x} = e^{(2+i)x} + e^{(2-i)x}$$

$$= e^{2x}(\cos(x) + i \operatorname{sen} x) + e^{2x}(\cos(x) - i \operatorname{sen} x)$$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ y tenemos que $\chi(2 \pm i) = 0$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - (2+i))(\lambda - (2-i))$$
$$= \lambda^2 - (2-i)\lambda - (2+i)\lambda + |2+i|^2$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 9$$

8. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

   a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   d) $y'' + y = 3x^2 - 5x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   f) $y'' + y = (1+x)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

c) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

d) $y'' + y = 3x^2 - 5x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

e) $\boxed{y'' + 4y' + 3y = 3e^x} + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

f) $y'' + y = (1 + x)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x)$

$ax^2 + bx + c$

e) $y'' + 4y' + 3y = 3e^x \rightarrow Ae^x$

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Para resolver $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x) \qquad \text{'tanteo'}$$

$$y_p'(x) = -2A\operatorname{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\operatorname{sen}(2x)$$

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \cos(2x)$$

$$(-4A\cos(2x) - 4B\operatorname{sen}(2x)) + 2(-2A\operatorname{sen}(2x) + 2B\cos(2x)) + 2(A\cos(2x) + B\operatorname{sen}(2x))$$

$$= \cos(2x)(A(-4+2) + 4B) + \operatorname{sen}(2x)(A(-4) + B(-4+2))$$

$$= \cos(2x)(-2A + 4B) + \operatorname{sen}(2x)(-4A - 2B)$$

$$-2A + 4B = 1 \longrightarrow 5B = 1$$

$$-4A - 2B = 0 \rightarrow -4A = 2B$$

$$-2A = B \qquad B = \frac{1}{5}$$

$$-2A = \frac{1}{5}$$

$$A = -\frac{2}{5}$$

$$y_p(x) = -\frac{2}{5}\cos(2x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$$

Conclusion si $y_h(x)$ es solucion de $y''+2y'+2y=0$

Entonces $y_p(x)+y_h(x)$ es solucion de $y''+2y'+2y=\cos(2x)$

Si quiero $y(0)=1$, $y'(0)=0$

$$y(x)=y_p(x)+y_h(x)$$

$$y(0)=\overbrace{y_p(0)}^{\text{fijo}}+y_h(0)=1$$

$$y'(0)=y_p'(0)+y_h'(0)=0$$

Esto equivale a encontrar y_h solucion homogenea tal que

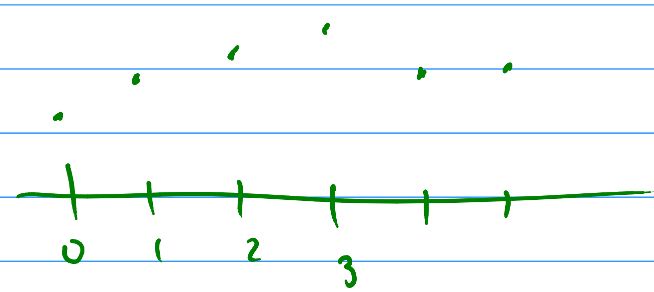
$$y_h(0)=1-y_p(0)$$
$$y_h'(0)=-y_p'(0)$$

Suseciones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

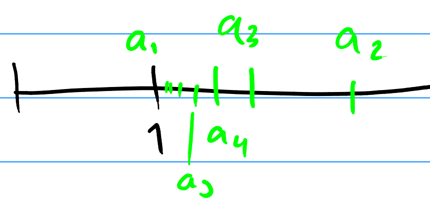
a) $a_n = 1+\frac{1}{n}$ b) $a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$ c) $a_n = n+\frac{1}{n}$ d) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ e) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$



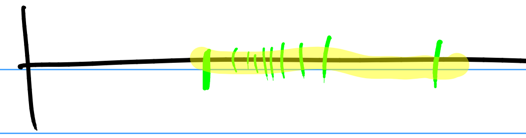
$a_n = 1+\frac{1}{n}$, $\cancel{a_0 = 1}$, $a_1 = 2$, $a_2=\frac{3}{2}$, $a_3=\frac{4}{3}$

$a_4=\frac{5}{4}$, $a_5=\frac{6}{5}$



¿ $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ es creciente o decreciente?

$(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente



$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [1,2]$ que es acotado

a_n converge si es acotada y existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{\to 0}$$

e) $\frac{n^2}{2^n}$ ¿monotonía?

$a_1 = 1/2$
$a_2 = 1$
$a_3 = 9/8 > 1$
$a_4 = 16/16 = 1$
$a_5 = 25/32 < 1$
$a_6 = 36/64$

$\underbrace{n^2 \leq 2^n \quad \forall\, n > 4}$

ej. Discreta 1

se prueba por inducción.

$(a_n)_{n>4}$ es decreciente

$n^2, 2^n > 0 \rightarrow \frac{n^2}{2^n} > 0 \qquad a_n \leq 9/8$

a_n está acotada entre 0 y $9/8$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\boxed{¿\ n \leq \sqrt{n^2+1}\ ?}$$

$$¿\ n \geq \sqrt{n^2+1}\ ?$$

$$n^2 < n^2+1 \rightarrow n < \sqrt{n^2+1}$$

a_n es menor a 1 acotada

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sim \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} \sim 1$$