FUNCIONES

6. Estudiar ceros, signos y representar gráficamente las siguientes funciones:

(i) $y = 4x - 1$

(ii) $y = -x + 2$

(iii) $y = x^2 + 6x - 7$

(iv) $y = -2x^2 + x + 10$

(v) $y = 5x^3 + 7x^2 - 10x - 2$

(vi) $y = 10x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

(vii) $y = 11x^4 - 17x^3 + 17x - 11$

(viii) $y = -4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x$

(ix) $y = x^4 - 5x^2 + 6$

(x) $y = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$

7. Para cada una de las funciones del ejercicio 6, se pide:

(a) G(| f |) (b) G(f^+) | $f^+(x) = \dfrac{f(x) + |f(x)|}{2}$ (c) G(f^-) | $f^-(x) = \dfrac{f(x) - |f(x)|}{2}$

(d) G(h) | $h(x) = f(|x|)$ (e) G(k) | $k(x) = f(-|x|)$ (f) G(f+λ) $\forall \ \lambda \in R$

8. Función homográfica

La función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, con las condiciones $c \neq 0$ y ad$\neq$bc gráficamente representa una hipérbola equilátera.

Para representar gráficamente a la hipérbola se recuerda que:
tiene una asíntota horizontal $y = \dfrac{a}{c}$, una asíntota vertical $x = -\dfrac{d}{c}$,

si $a \neq 0$ corta al eje OX en $x = -\dfrac{b}{a}$ (si a = 0 no corta al eje OX),

si $d \neq 0$ corta al eje OY en $y = \dfrac{b}{d}$ (si d = 0 no corta al eje OY)

Representar gráficamente una hipérbola en un sistema de coordenadas y ubicar esos datos.

9. Efectuar la RG de las siguientes funciones:

(a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (c) $y = \dfrac{-x+1}{x-1}$ (d) $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$ (e) $y = \dfrac{2x+3}{x}$

(f) $y = \dfrac{3x}{-x+2}$ (g) $y = \dfrac{2}{x-2}$ (h) $y = \dfrac{1}{x}$ (i) $y = \dfrac{x+2}{2x}$ (j) $y = \dfrac{2x+3}{3x-2}$

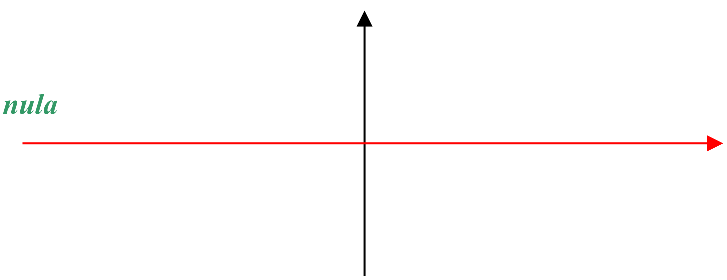
RESOLUCIÓN

FUNCIONES POLINÓMICAS

El bosquejo gráfico de una función polinómica es muy sencillo de llevar a cabo, se trata simplemente de identificar sus propiedades más notables.

Si se trata de la función nula: y = 0, su gráfico es el eje OX.

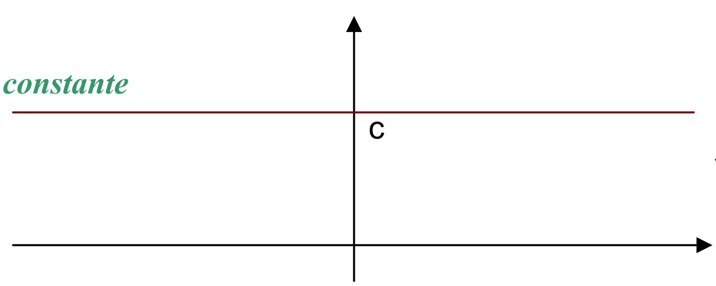
Función nula



y = 0 (eje OX)

Si se trata de un polinomio de grado 0, o función constante, y = c, su gráfico es una recta paralela al eje OX que corta al eje OY en c.

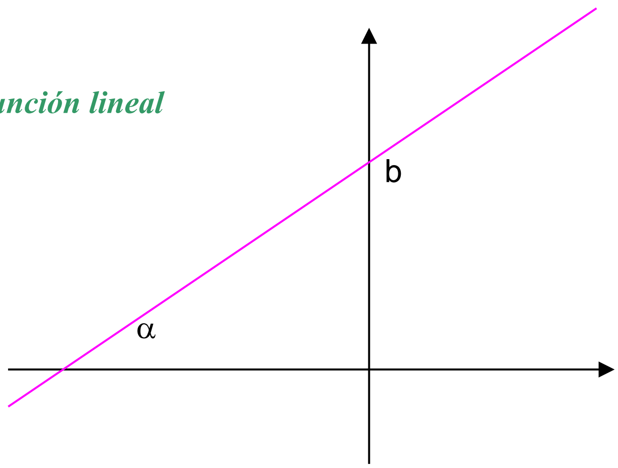
Función constante



y = c (|| a OX)

Si hablamos del polinomio de 1er grado, es la función lineal $y = a \cdot x + b$, cuya representación gráfica es una recta que corta al eje OY en “b” y forma con el eje OX un ángulo cuya tangente coincide con “a”.

Función lineal



“b” se llama ordenada en el origen y representa el punto de corte con el eje oy.

“a” se llama coeficiente angular o pendiente y representa la tangente del ángulo que forma la recta con el eje ox: $a = tg(\alpha)$

Función cuadrática

Se trata de la función polinómica de 2do grado: $y = ax^2 + bx + c$

cuyo gráfico se conoce con la denominación de parábola.

Para representarla es suficiente con unos pocos datos:

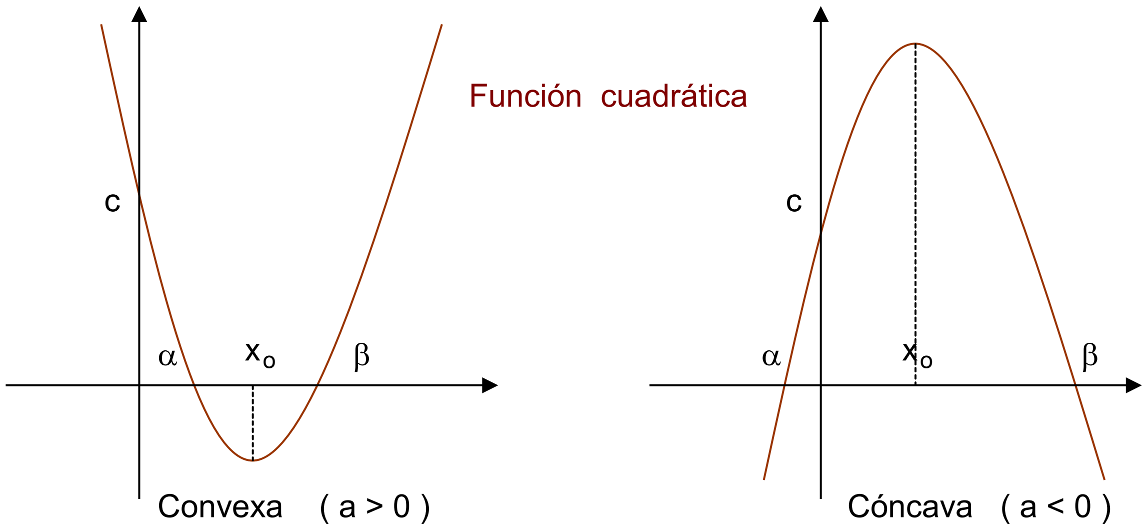
(1) El signo de “a” define si es convexa (a > 0) o cóncava (a < 0)

(2) El valor de c determina el corte con el eje OY

(3) El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ permite saber que:

$$\begin{cases} \text{si } \Delta > 0\text{, corta al eje Ox en los puntos } \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{si } \Delta = 0\text{, es tangente al eje Ox en } \dfrac{-b}{2a} \\ \text{si } \Delta < 0\text{, no corta al eje Ox} \end{cases}$$

(4) La abscisa del vértice es $x_o = -\dfrac{b}{2a}$, la ordenada es $y_o = a \cdot x_o^2 + b \cdot x_o + c$



PRIMERA NOCIÓN DE DERIVADA Y SU APLICACIÓN

Dada una función se puede definir otra función asociada a ella llamada “derivada”, esta función asociada que proviene o deriva de la primera es muy útil porque permite conocer algunas de sus propiedades. Entre otras cosas, la derivada nos permite saber si una función crece o decrece, si tiene máximos o mínimos.

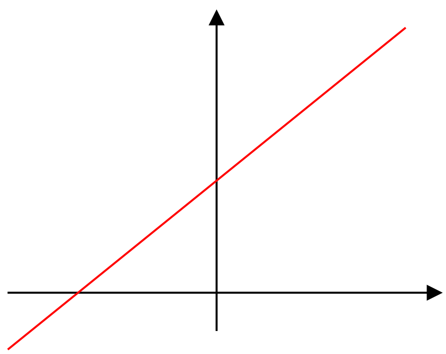
Ejemplos:

(1) En la función constante y = c, la derivada es y ‘ = 0

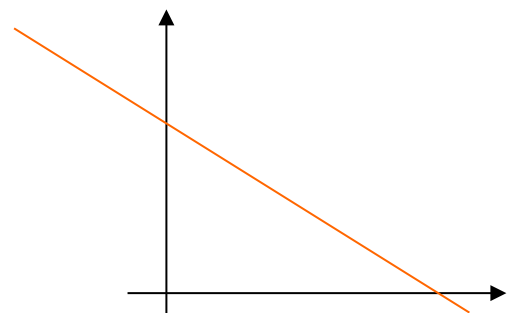
la función constante no crece ni decrece.

(2) En la función lineal y = a·x + b, la derivada es y '= a, en este caso se observa que el signo de la derivada coincide con el de "a", si a > 0 la función lineal crece, si a < 0 la función decrece. Este resultado es general:

"si la derivada es positiva la función crece y si es negativa la función decrece"



a > 0 ***"función creciente"***



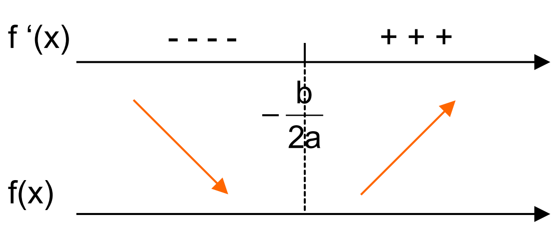
a < 0 ***"función decreciente"***

En ambos casos el signo de a coincide con el de la derivada, de hecho la derivada es "a" en la función lineal.

(3) En la función cuadrática $y = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ la derivada es $y' = 2a{\cdot}x + b$

Si aceptamos que el signo de la derivada es positivo cuando la función crece y negativo cuando decrece, podríamos hacer el siguiente esquema:

Si a > 0

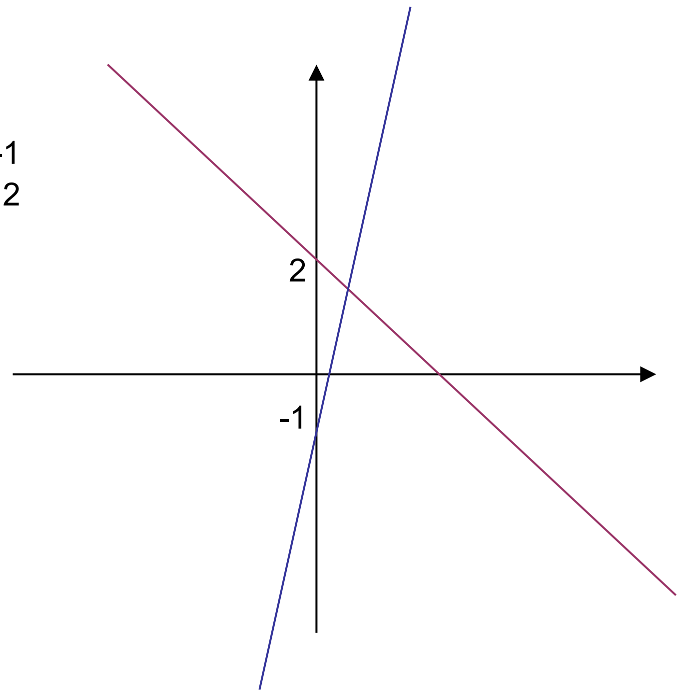


La flecha hacia abajo coincide con el signo negativo de la derivada: allí la función decrece. La flecha hacia arriba es coincidente con el signo positivo de la derivada, la función crece. En el punto donde deja de decrecer y comienza a crecer hay un mínimo, coincide con el vértice de la parábola.

Ejercicio 6

i) $y = 4x - 1$ corta al eje oy en -1

ii) $y = -x + 2$ corta al eje oy en 2



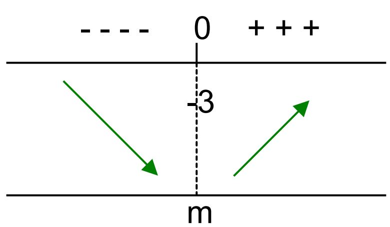
iii) $y = x^2 + 6x - 7$

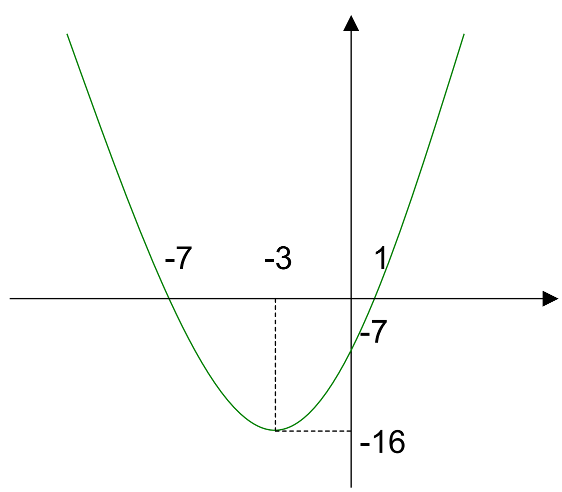
a = 1 > 0 ⇒ es convexa (o tiene concavidad positiva).

Corta al eje Oy en c = -7(término independiente)

Corta al eje Ox en 1 y -7(raíces)

La derivada es: y ‘ = 2x + 6, que tiene raíz x = -3 y su signo es:





decrece hasta el punto de abscisa

x = - 3, donde tiene el mínimo,

o el vértice: f(-3) = -16, y luego crece.

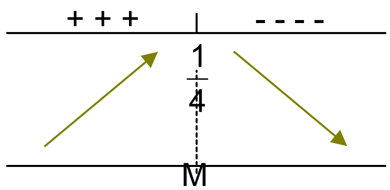
iv) $y = -2x^2 + x + 10$

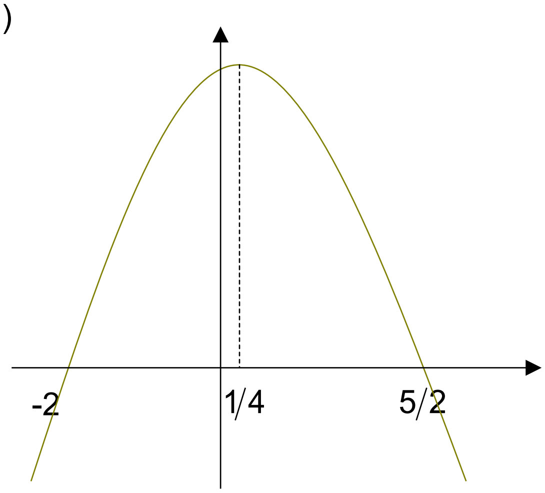
$a = -2 < 0 \Rightarrow$ es cóncava (concavidad negativa)

Corta al eje Oy en c = 10

Corta al eje Ox en -2 y $5/2$

Derivada: y ' = -4x + 1





Tiene el máximo en x = $\frac{1}{4}$ con valor $f(\frac{1}{4}) = \frac{81}{8}$

v) $y = 5x^3 + 7x^2 - 10x - 2$

Admite raíz evidente x = 1, luego de aplicar Ruffini queda el cociente

$5x^2 + 12x + 2$ que tiene raíces $\frac{-6 \pm \sqrt{26}}{5} \approx \begin{cases} -0{,}18 \\ -2{,}22 \end{cases}$

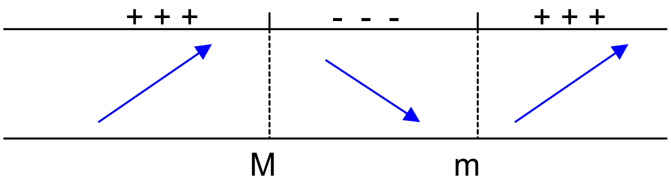
Signos:

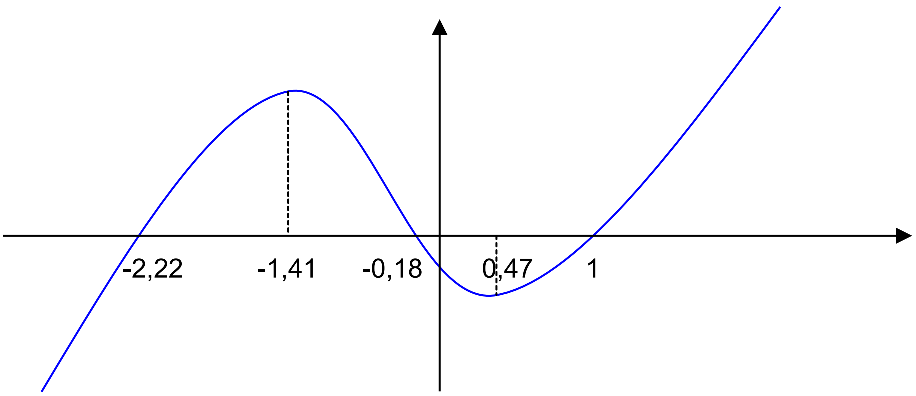
- - -	0	+ + +	0	- - -	0	+ + +
	-2,22		-0,18		1	

Derivada:

y ' = $15x^2 + 14x - 10$ tiene raíces $\frac{-7 \pm \sqrt{199}}{15} \approx \begin{cases} 0{,}47 \\ -1{,}41 \end{cases}$

Variación y extremos:





vi) $y = 10x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

Admite raíz evidente –1 y después de aplicar Ruffini queda el cociente

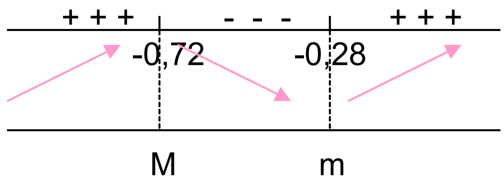
$10x^2 + 5x + 1$ que N.T.R.R.

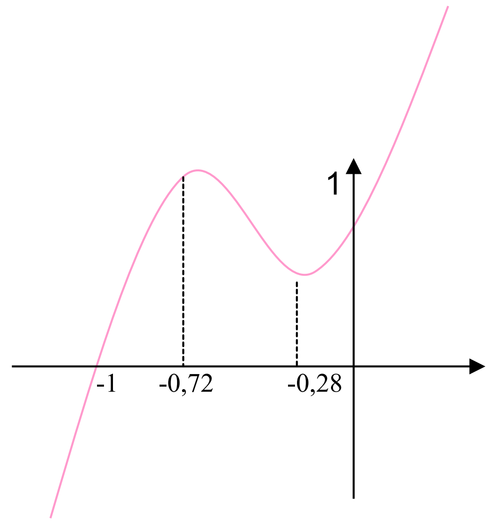
El signo es:

- - - - 0 + + + +
-1

La derivada es y ‘ = $30x^2 + 30x + 6$ tiene raíces $\dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{10} = \begin{cases} -0{,}28 \\ -0{,}72 \end{cases}$

Variación y R.G.:





vii) $y = 11x^4 - 17x^3 + 17x - 11$

Tiene raíces evidentes 1 y –1, después de aplicar el esquema de Ruffini en cascada queda el cociente $11x^2 - 17x + 11$, que N.T.R.R.

+ + +	- - -	+ + +
	-1 1	

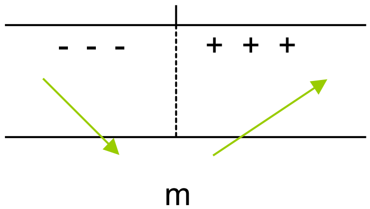
La derivada es: y ' = $44x^3 - 51x^2 + 17$

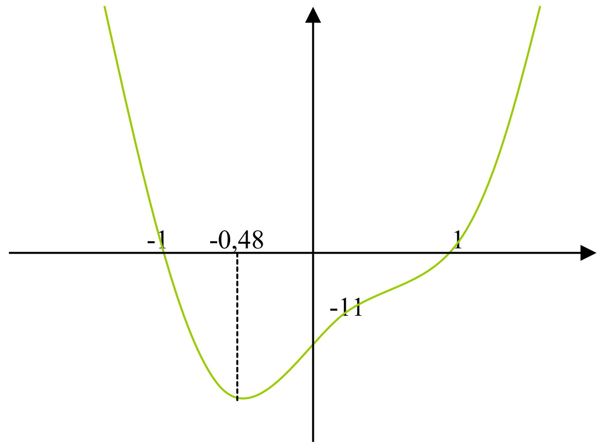
Comprueba que no tiene raíces evidentes ni racionales. Pero por ser de grado impar tiene al menos una raíz real

Sabemos que las ecuaciones de 3er y 4to grado son solubles por radicales pero la complejidad de las fórmulas hace inviable su aplicación en forma manual, entonces se debe recurrir a formas alternativas que permiten hallar valores aproximados de las raíces, por tanteo, o con algún software apropiado, por ejemplo el Derive.

En este caso la derivada tiene una sola raíz real cuyo valor aproximado es –0,48

Variación de la función y R.G.:





El gráfico en forma aproximada es el que se observa; presenta una asimetría debido a la existencia de puntos de inflexión, que se pueden ubicar usando la derivada segunda (es decir la derivada de la derivada)

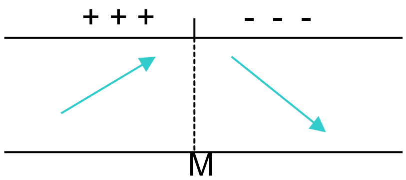
viii) $y = -4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x$

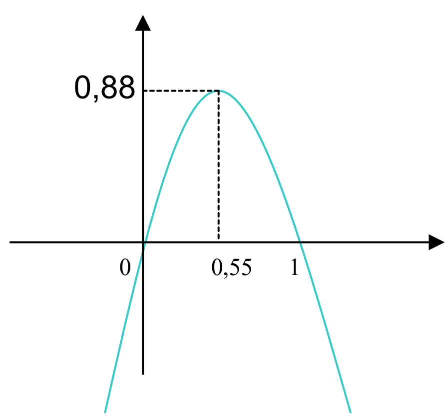
Admite raíces evidentes 1 y 0. No tiene otras raíces reales.

- - - | + + + | - - -

0 1

La derivada y ' = $-16x^3 + 21x^2 - 14x + 4$ tiene sólo una raíz real 0,55





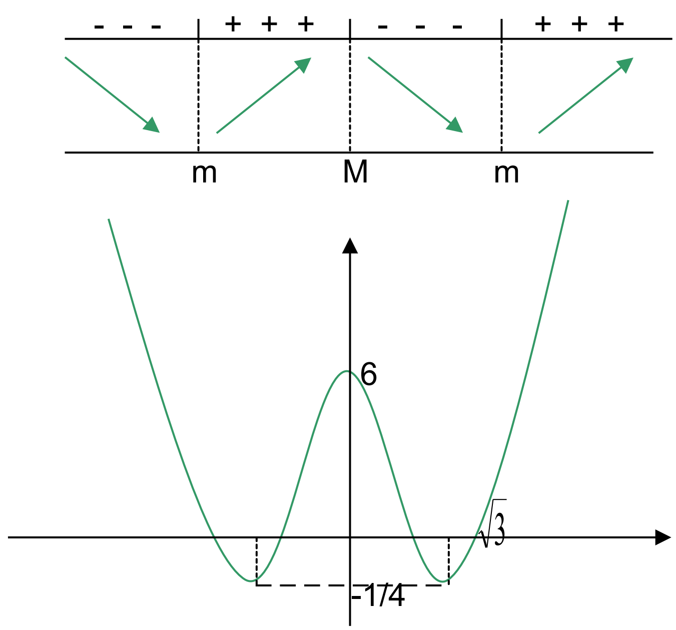
ix) $y = x^4 - 5x^2 + 6$

Para hallar las raíces se aplica un cambio de variable: $z = x^2$, queda

$z^2 - 5z + 6 = 0 \;\Rightarrow\; z = 2 \;\wedge\; z = 3 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{2} \;\wedge\; x = \pm\sqrt{3}$

+ + +		- - -		+ + +		- - -		+ + +
	$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	

Derivada: $y' = 4x^3 - 10x = 2x\cdot(2x^2 - 5)$ tiene raíces: x = 0, $x = \pm\sqrt{5/2} \approx \pm 1{,}58$



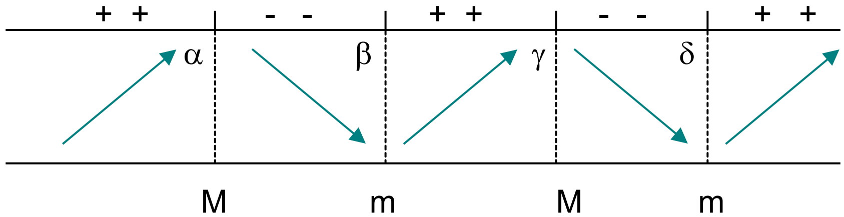
x) $y = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$

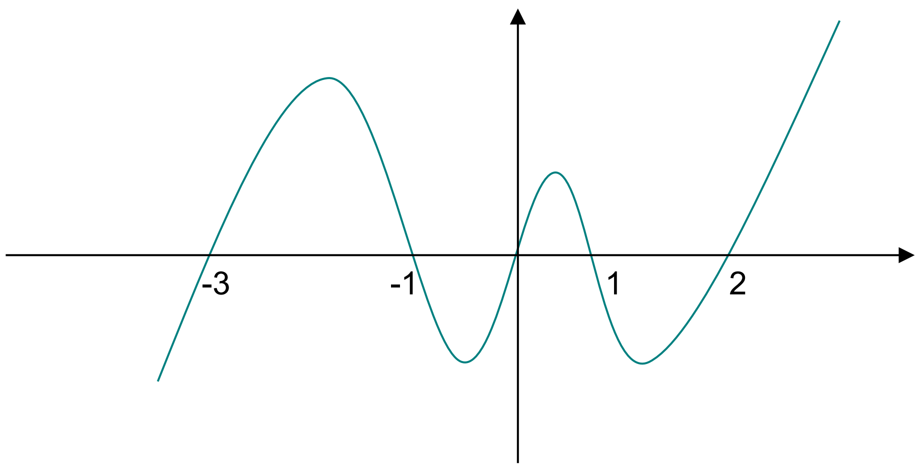
Admite raíces evidentes 0 , 1 y –1., las otras raíces son 2 y –3.

- -		+ +		- -		+ +		- -		+ +
	-3		-1		0		1		2	

La derivada: y ‘ = $5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 6$

tiene raíces $\alpha = -2{,}39$ $\beta = -0{,}57$ $\gamma = 0{,}53$ y $\delta = 1{,}64$





Ejercicio 7

(a) Comenzamos a estudiar funciones donde interviene el valor absoluto.

Recordemos su definición: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

Esto aplicado a una función, significa que: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

Gráficamente, si una función es positiva o cero cuando se le aplica valor absoluto quedará exactamente igual. En cambio, si es negativa el valor absoluto le invierte el signo y su gráfico será simétrico (del gráfico de f) con respecto al eje Ox. Si una función admite ambos signos, cuando le apliquemos valor absoluto, la parte del gráfico por encima del eje Ox

quedará igual y la parte por debajo del eje Ox se simetriza con respecto a ese eje.

(b) Se define la función $f^+ : f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$

de acuerdo con esta definición el gráfico de f^+ coincide con el de f cuando la función es positiva o cero y coincide con el eje Ox (función nula) cuando el signo de f es negativo

(c) Se define la función $f^- : f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$

con esta definición el gráfico de f^- coincide con el eje Ox cuando f es positiva, es simétrica de f cuando ésta es negativa.

(d) Se define la función h : h(x) = f(|x|) = $\begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

esta definición implica que el gráfico de h coincide con el de f para x > 0, para x < 0 su gráfico será el simétrico del anterior con respecto al eje Oy.

(e) Por último se define k : k(x) = f(-|x|) = $\begin{cases} f(-x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

es igual a f para x < 0, y para x > 0 se simetriza la anterior con respecto al eje Oy.

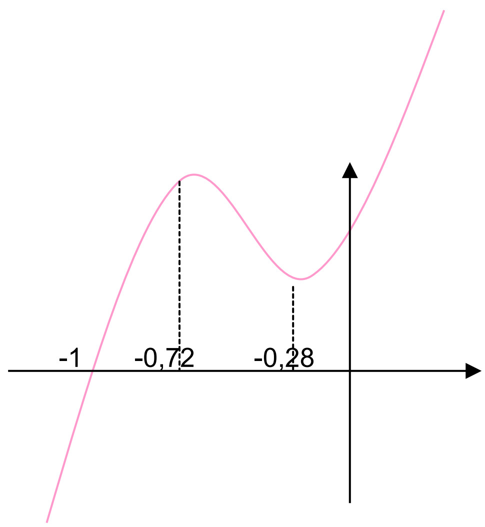
(f) $f + \lambda$ con $\lambda \in R$, es una familia de funciones dependientes de un parámetro λ,

cada una de ellas se obtiene a partir de la función f (caso λ = 0) a la que se le suma

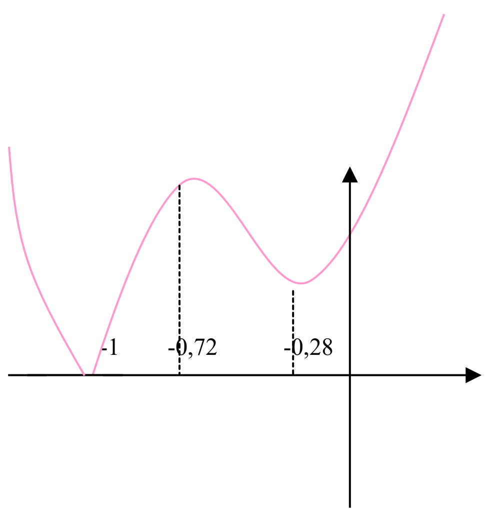
el valor del parámetro.

A modo de ejemplo utilizaremos la función del ejercicio 6, parte(vi)

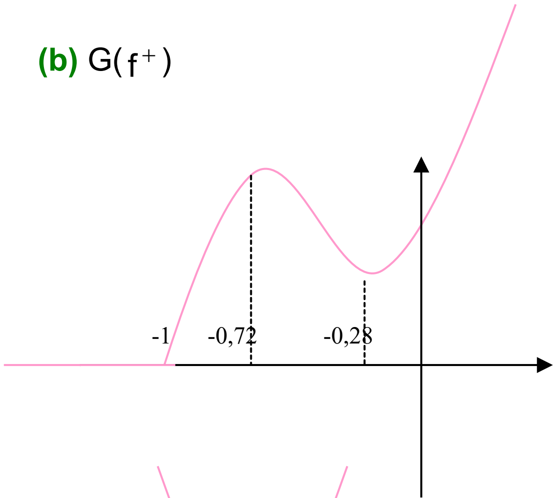
G(f)



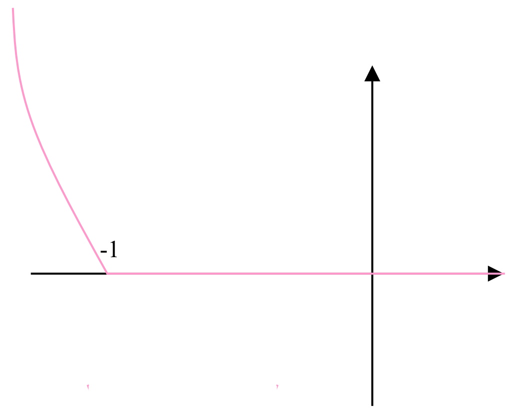
(a) G(|f|) :



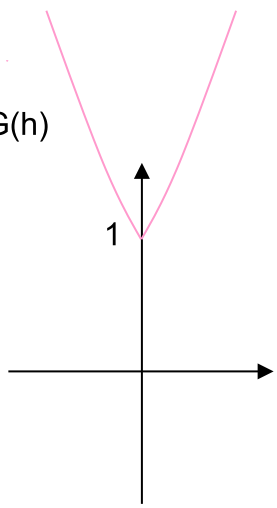
(b) G(f^+)



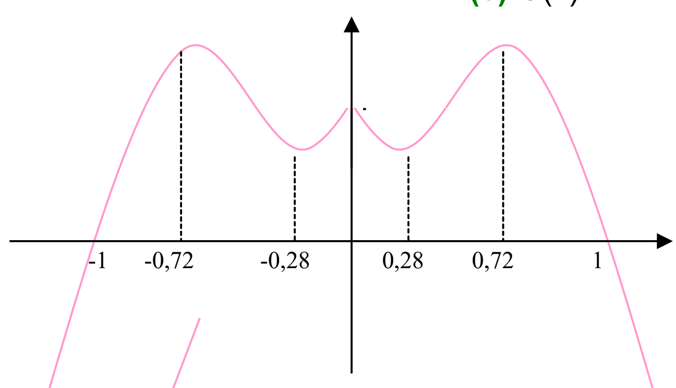
(c) G(f^-)



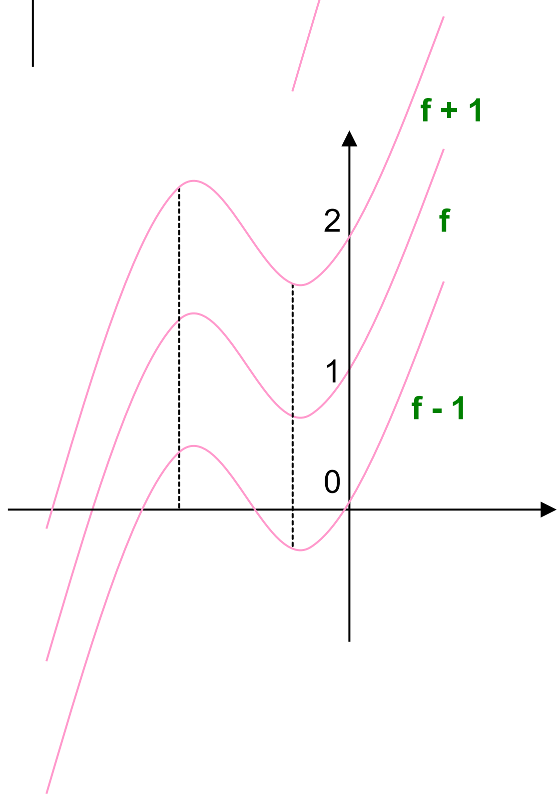
(d) G(h)



(e) G(k)

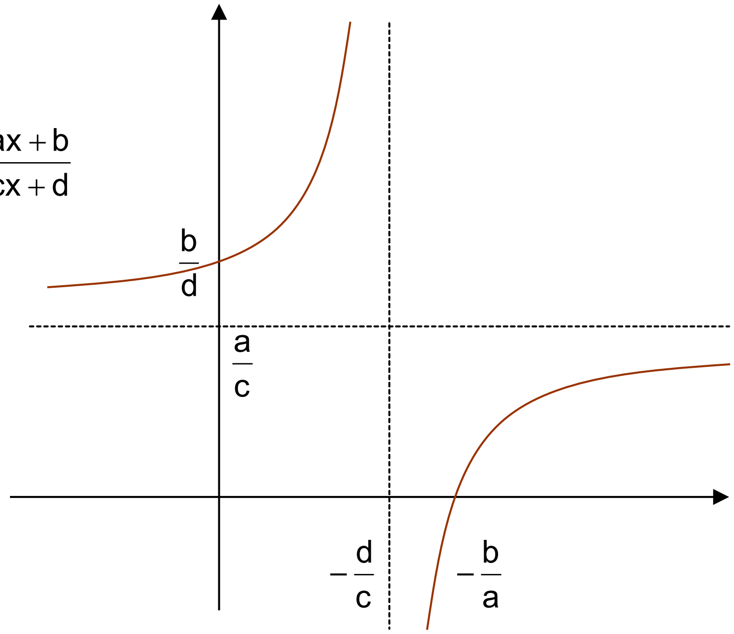


(f) G($f + \lambda$)



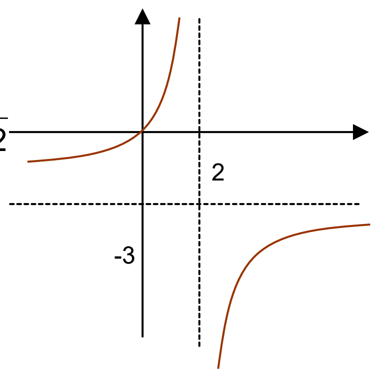
Ejercicio 8

Función homográfica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

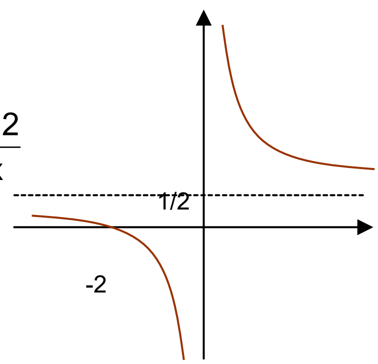


Ejercicio 9

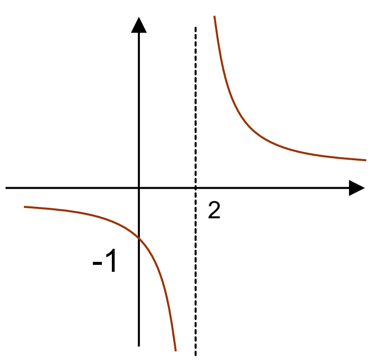
f) $y = \dfrac{3x}{-x+2}$



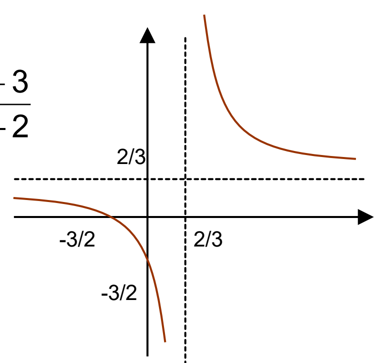
i) $y = \dfrac{x+2}{2x}$



g) $y = \dfrac{2}{x-2}$



j) $y = \dfrac{2x+3}{3x-2}$



10. Estudiar existencia, ceros, signos, asíntotas horizontal y vertical y representar gráficamente las siguientes funciones:

(a) $y = \dfrac{-x^2+1}{-x^2+8x-12}$ (b) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ (c) $y = \dfrac{-9x^2+3x+2}{12x^2-20x+8}$

(d) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ (e) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x+2}$ (f) $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^3-4x}$

11. En cada caso del ejercicio10, indicar gráficamente cuántas soluciones tiene la ecuación $y = \lambda$ y en que intervalos se encuentran, discutiendo $\forall\ \lambda \in R$.

12. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

(a) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+9} \geq x-4 \\ \dfrac{x-2}{x+1}+1 \leq \dfrac{x+3}{x-1} \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2-3x \leq \dfrac{2x^3-6x^2}{x-1} \\ \dfrac{9}{x} < 8-\dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

13. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $x \cdot \sqrt{x-1} > (x-1) \cdot \sqrt{x-2}$ (b) $\sqrt{x-1} > 2 \cdot \sqrt{x-2}$

(c) $\sqrt{x+1} > 3x-7$ (d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{7x+4}$

14. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

(a) $|2x-1|+x = |x|+3$ (b) $\dfrac{3}{|x|}+2x = |x-1|$ (c) $|2x+1|-x = 2-|x-1|$

(d) $\dfrac{|x-1|}{|x|+2} = \dfrac{x+3}{x-2}$ (e) $\dfrac{|x-3|}{x+2} > |x+1|$ (f) $3 > \dfrac{x-5}{1-\left|\dfrac{x}{2}+3\right|}$

15. Estudiar existencia, ceros, signos y representar gráficamente:

(a) $y = |x| + 4x + |x-1|$ (b) $y = \left|x^2 - 16\right| + 5x + 3$ (c) $y = \dfrac{|x-2| + x - 3}{x-1}$

RESOLUCIÓN

Ejercicios 10 y 11

a) $y = \dfrac{-x^2+1}{-x^2+8x-12}$

Existencia:

Dom = $\{ x \in R : -x^2 + 8x - 12 = 0 \} = \{ x \in R : x \neq 2 , x \neq 6 \}$

Ceros:

$y = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge x = -1$

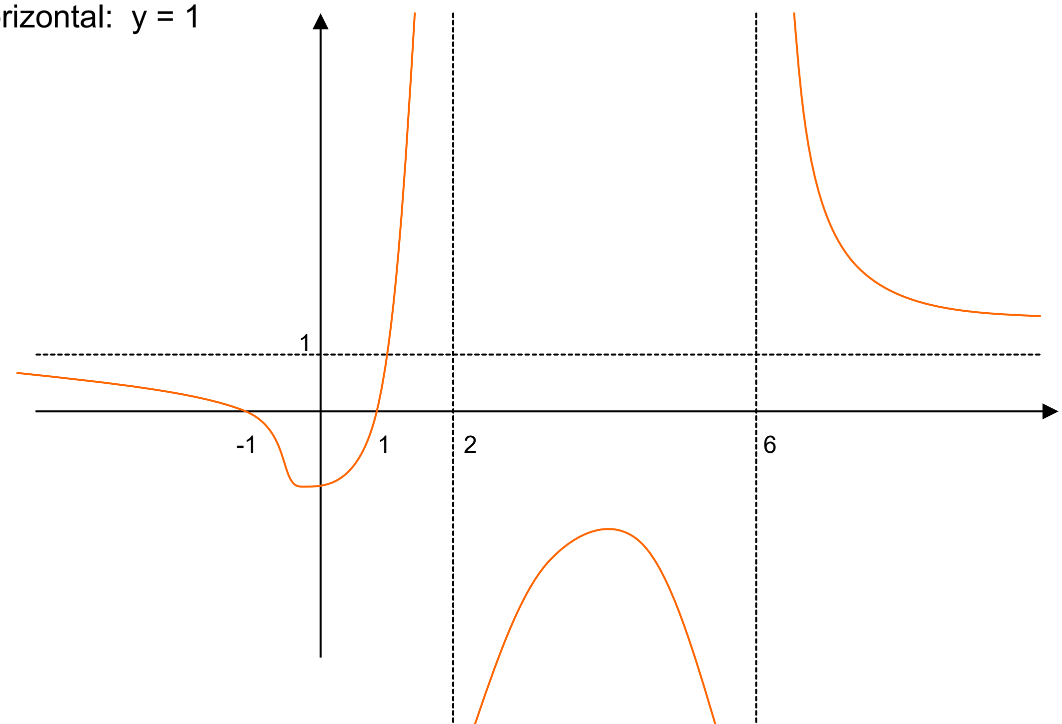
Signos:

+ + +	0	- - -	0	+ + +	∄	- - -	∄	+ + +
	-1		1		2		6	

Asíntotas:

Verticales: $x = 2 \wedge x = 6$

Horizontal: $y = 1$



Para determinar el número de soluciones de la ecuación y = λ, tenemos dos caminos posibles: uno gráfico, que consiste en ver el número de intersecciones del gráfico de la función con el de la recta paralela a Ox que corta a Oy en λ; el otro es algebraico y consiste en resolver la ecuación $\frac{-x^2+1}{-x^2+8x-12}=\lambda$, se pueden aplicar ambos métodos combinados, por ejemplo gráficamente vemos que existe sólo un corte con la asíntota horizontal y que se encuentra entre 1 y 2 pero no sabemos exactamente dónde está ese corte, para determinarlo resolvemos la ecuación $\frac{-x^2+1}{-x^2+8x-12}=1$ cuya solución es x = $\frac{13}{8}$.

Para discutir el número de soluciones en función de λ, deberíamos conocer los valores de los extremos.

Aquí se nos presentan dos alternativas: una sería investigar para qué valores de λ la ecuación $\frac{-x^2+1}{-x^2+8x-12}=\lambda$ tiene una raíz doble, considerando que en los extremos la recta y = λ es tangente al gráfico.

La ecuación se puede llevar a una de 2do grado: $-x^2+1=\lambda(-x^2+8x-12) \Rightarrow$

$(\lambda-1)x^2-8\lambda x+12\lambda+1=0$ y ésta tiene raíz doble cuando el discriminante Δ = 0

$\Rightarrow \quad \Delta=64\lambda^2-4(\lambda-1)(12\lambda+1) \;\Rightarrow\; 16\lambda^2+44\lambda+4=0 \;\Rightarrow\; 4\lambda^2+11\lambda+1=0$ cuyas soluciones son $\lambda=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{8}\approx\begin{cases}-0{,}09\\-2{,}65\end{cases}$.

Estos valores representan las ordenadas de los extremos relativos. Si quisiésemos hallar las abscisas de esos puntos tendríamos que sustituir los valores hallados de λ en la ecuación de 2do grado que habíamos obtenido y de allí despejar “x”, pero el problema se simplifica al recordar que esos valores de λ son los que dan raíces dobles en la ecuación, siendo el discriminante Δ = 0, para este caso $x = -\frac{b}{2a}$

con a = λ - 1 y b = -8λ $\Rightarrow$ $x = \frac{8\lambda}{2(\lambda-1)} = \frac{4\lambda}{\lambda-1} \approx \begin{cases} 0{,}34 \\ 2{,}91 \end{cases}$

$\Rightarrow$ el mínimo es (0,34 ; -0,09) y el máximo es (2,91 ; -2,65)

La otra alternativa, más fácil de llevar a la práctica, es determinar los extremos relativos utilizando la derivada.

En el caso de un cociente para obtener la derivada se utiliza la siguiente fórmula:

$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y = \frac{-x^2+1}{-x^2+8x-12} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-2x(-x^2+8x-12)-(-x^2+1)(-2x+8)}{(-x^2+8x-12)^2} =$$

$$\frac{-8x^2+26x-8}{(-x^2+8x-12)^2}$$

Los ceros de la derivada son $x = \frac{13 \pm \sqrt{105}}{8} \approx \begin{cases} 0{,}34 \\ 2{,}91 \end{cases}$ resultados coincidentes con los que ya habíamos obtenido por el procedimiento precedente.

En respuesta al ejercicio 11, de acuerdo a los resultados anteriores, podemos concluir que:

Si λ < -2,65 hay dos soluciones, una en (2 ; 2,91) y la otra en (2,91 ; 6)

Si λ = -2,65 hay una solución x = 2,91

Si –2,65 < λ < -0,09 no hay soluciones.

Si λ = -0,09 hay una solución x = 0,34

Si –0,09 < λ < 1 hay dos soluciones, una en (-∞ ; 0,34) y la otra en (0,34 ; $\frac{13}{8}$)

Si λ = 1 hay una solución x = $\frac{13}{8}$

Si λ > 1 hay dos soluciones, una en ($\frac{13}{8}$, 2) y la otra en (6 , +∞)

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$

Dom = R

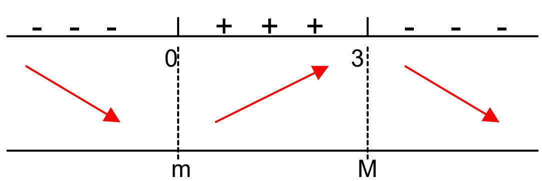
Ceros: x = 1 $\wedge$ x = -3

Signos:

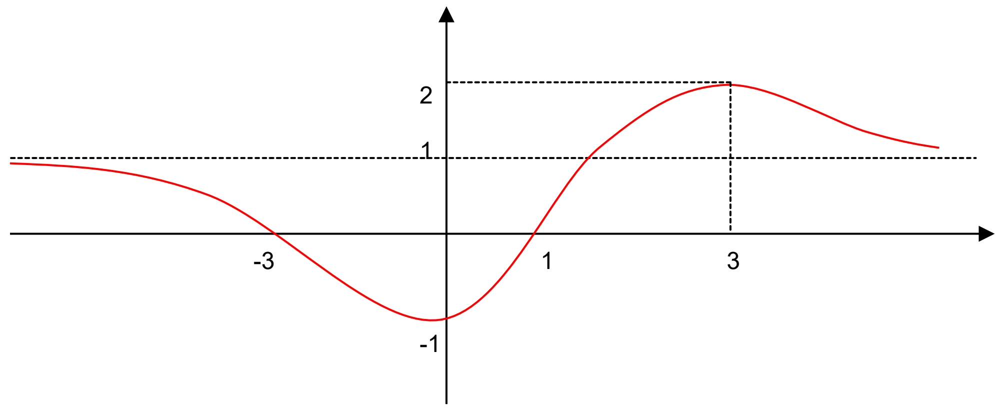
$$\begin{array}{ccccc} + \; + & 0 & - \; - & 0 & + \; + \\ \hline & -3 & & 1 & \end{array}$$

Asíntota horizontal y = 1

Derivada: $y' = \dfrac{(2x+2)(x^2-2x+3)-(x^2+2x-3)(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2} = \dfrac{-4x^2+12x}{(x^2-2x+3)^2}$



mínimo relativo f(0) = -1, máximo relativo f(3) = 2



Corte con la asíntota:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-3=x^2-2x+3 \quad \Rightarrow \quad 4x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Número de soluciones de la ecuación $y = \lambda$

Si $\lambda < -1 \vee \lambda > 2$, no hay soluciones.

Si $\lambda = -1 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 2$, hay una solución única en cada caso.

Si $-1 < \lambda < 1 \vee 1 < \lambda < 2$, hay dos soluciones.

c) $y=\dfrac{-9x^2+3x+2}{12x^2-20x+8}$

Existencia o Dom = $\{ x \in R : x \neq 1 \wedge x \neq \frac{2}{3} \}$

Ceros: $y = 0 \Rightarrow -9x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{2}{3}$, pero el valor $\frac{2}{3}$ se debe

descartar porque está fuera del dominio de la función.

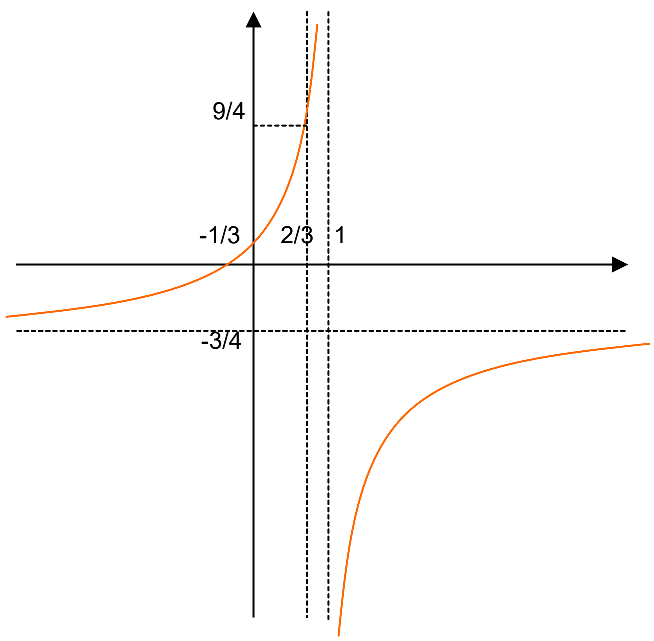
Signos:

- -	0	+ + +	∄	+ +	∄	- -
	$-1/3$		$2/3$		1	

Antes de continuar conviene simplificar la función dado que hay una raíz común en el numerador y denominador, usando la descomposición factorial:

$$y=\frac{-9(x+1/3)(x-2/3)}{12(x-1)(x-2/3)} \quad \text{simplificando:} \quad y=\frac{-(3x+1)}{4(x-1)} \quad \text{(homográfica)}$$

$\frac{2}{3}$ no pertenece al dominio de la función, pero para valores de x próximos a $\frac{2}{3}$ la función está definida y su valor se aproxima al $\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{-(3x+1)}{4(x-1)}=\frac{9}{4}$



d) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Dom = $\{ x \in R : x \neq \pm 1 \}$,   Cero: $x = 0$

Signos:

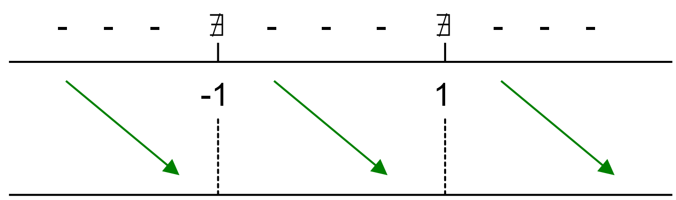
- - -	-1	+ + +	0	- - -	1	+ + +

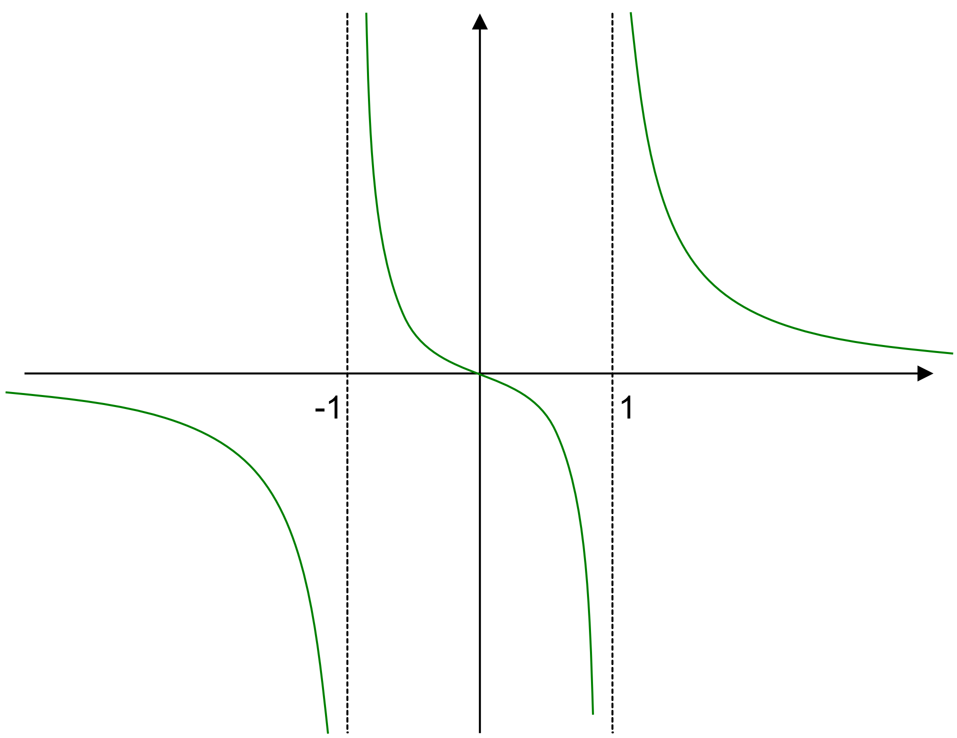
Asíntota horizontal $y = 0$ (eje Ox)

Asíntotas verticales $x = -1 \wedge x = 1$

Derivada:

$$y' = \frac{1(x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$





e) $y = \dfrac{x-2}{x^2-4x+2}$

Dom = { $x \in R$: $x \neq 2 \pm \sqrt{2}$ }, Cero: $x = 2$

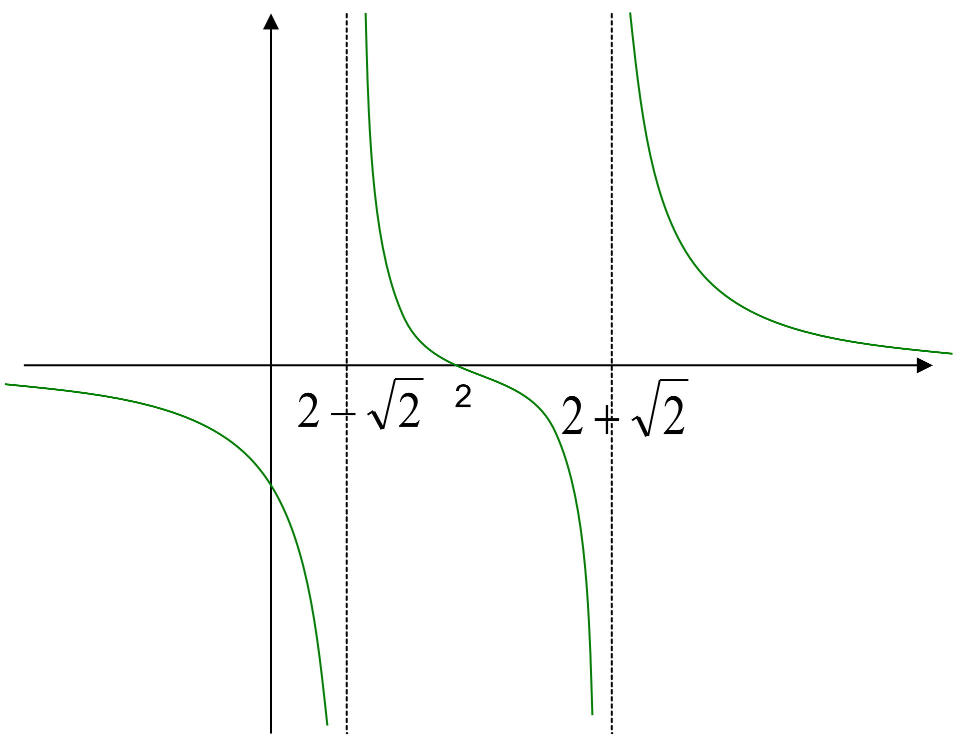
Signos

-	-	$\nexists$	+	+	0	-	-	$\nexists$	+	+
		$2-\sqrt{2}$			2			$2+\sqrt{2}$		

Asíntotas verticales: $x = 2 \pm \sqrt{2}$ Asíntota horizontal: $y = 0$

Derivada:

$$y' = \frac{1(x^2-4x+2)-(x-2)(2x-4)}{(x^2-4x+2)^2} = \frac{-x^2+4x-6}{(x^2-4x+2)^2} \quad \text{N.T.R.R.}$$



f) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}$ Dom = $\{ x \in R : x \neq 0 ,\ x \neq \pm 2 \}$

Ceros: $y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -1$

Como numerador y denominador tienen una raíz común la función se puede

simplificar: $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x(x+2)(x-2)} \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x(x+2)} \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$

Signos: - - ∄ + + + 0 - - - ∄ + + + ∄ + +

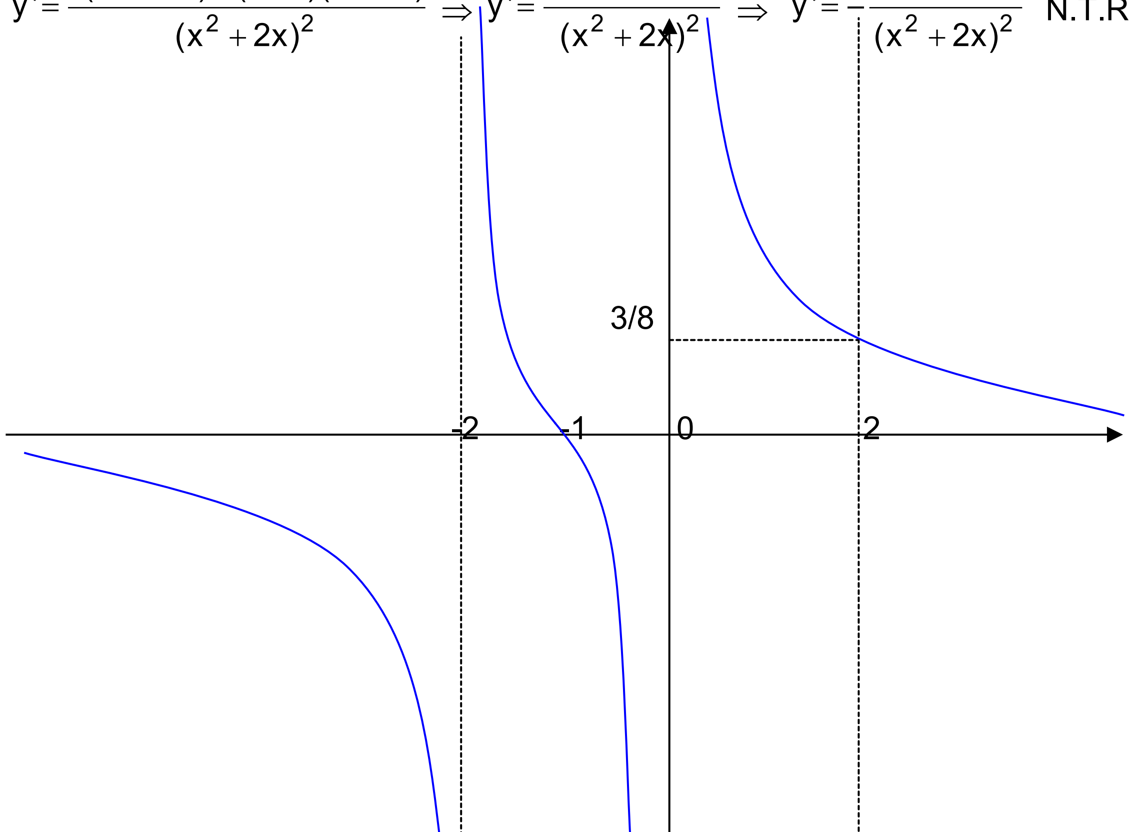
-2 -1 0 2

Asíntota horizontal: y = 0 Asíntotas verticales: x = -2 , x = 0

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = \dfrac{3}{8}$

Derivada:

$y' = \dfrac{1(x^2+2x) - (x+1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-x^2-2x-2}{(x^2+2x)^2} \Rightarrow y' = -\dfrac{x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$ N.T.R.R.



Ejercicio12

a) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+9} \geq x-4 \\ \dfrac{x-2}{x+1}+1 \leq \dfrac{x+3}{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+9}-x+4 \geq 0 \\ \dfrac{x-2}{x+1}+1-\dfrac{x+3}{x-1} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{x^2+2x-35}{x+9} \geq 0 \quad (1) \\ \dfrac{x^2-7x-2}{x^2-1} \leq 0 \quad (2) \end{cases}$

	-9		-7		5	
+	∄	-	0	+ + + +	0	- -

	-1		-0,27		1		7,27	
+ + +	∄	-	0	+	∄	- -	0	+

Solución (1) = { $x \in R$: $x < -9$, $-7 \leq x \leq 5$ }

Solución (2) = { $x \in R$: $-1 < x \leq \dfrac{7-\sqrt{57}}{2} \approx -0{,}27$, $1 < x \leq \dfrac{7+\sqrt{57}}{2}$ }

La solución del sistema es la intersección de ambas soluciones:

Solución del sistema { $x \in R$: $-1 < x \leq \dfrac{7-\sqrt{57}}{2}$, $1 < x \leq 5$ }

b) $\begin{cases} x^2-3x \leq \dfrac{2x^3-6x^2}{x-1} \\ \dfrac{9}{x} < 8-\dfrac{1}{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x-\dfrac{2x^3-6x^2}{x-1} \leq 0 \\ \dfrac{9}{x}-8+\dfrac{1}{x-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x^3+2x^2+3x}{x-1} \leq 0 \\ \dfrac{-8x^2+26x-18}{x(x-2)} < 0 \end{cases}$

	-1		0		1		3	
- -	0	+ +	0	- -	∄	+ + +	0	- -

	0		1		2		9/4	
- - -	∄	+ +	0	-	∄	+	0	- - -

Solución: { $x \in R$: $x \leq -1$, $x \geq 3$ }

Ejercicio 13

a) $x \cdot \sqrt{x-1} > (x-1) \cdot \sqrt{x-2}$

Existencia: deben cumplirse las condiciones: $x - 1 \geq 0 \wedge x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Resolución: para $x \geq 2$, $x \cdot \sqrt{x-1} > 0 \wedge (x-1)\sqrt{x-2} \geq 0$

$\Rightarrow$ se puede elevar al cuadrado ambos términos y la desigualdad no cambia:

$$x^2(x-1) > (x-1)^2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x-1) - (x-1)^2(x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x-1)[x^2 - (x-1)(x-2)] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(3x-2) > 0$$

+ + +	0	- - -	0	+ + +
	2/3		1	

Solución: $\{ x \in R : x \geq 2 \}$

b) $\sqrt{x-1} > 2 \cdot \sqrt{x-2}$

Existencia: $x \geq 2$

Elevando al cuadrado: $x - 1 > 4 \cdot (x - 2) \Rightarrow x - 1 > 4x - 8 \Rightarrow -3x + 7 > 0$

$\Rightarrow -3x > -7 \Rightarrow 3x < 7 \Rightarrow x < 7/3$

Solución: $\{ x \in R : 2 \leq x < \frac{7}{3} \}$

c) $\sqrt{x+1} > 3x - 7$

Existencia: $x \geq -1$

Signo de $3x - 7$

-	-	-	0	+	+	+
			7/3			

Si $x \leq \frac{7}{3}$ la inecuación $\sqrt{x+1} > 3x - 7$ se cumple $\forall$ x / $-1 \leq x \leq \frac{7}{3}$

Si $x > \frac{7}{3}$, elevamos al cuadrado: $x + 1 > (3x-7)^2 \Rightarrow x + 1 > 9x^2 - 42x + 49$

$\Rightarrow -9x^2 + 43x - 48 > 0$

-	-	0	+	+	0	-	-
		16/9			3		

Solución: $\{ x \in R : -1 \leq x < 3 \}$

d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{7x+4}$ Existencia: $x \geq -\frac{4}{7}$

Elevando al cuadrado: $x + 6 + x + 1 + 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} \leq 7x + 4 \Rightarrow$

$2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} \leq 5x - 3 \Rightarrow$ si $-\frac{4}{7} \leq x \leq \frac{3}{5}$ la ecuación no tiene solución;

si $x > \frac{3}{5}$ nuevamente elevamos al cuadrado:

$4(x+6)(x+1) \leq (5x-3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 28x + 24 \leq 25x^2 - 30x + 9 \Rightarrow$

$21x^2 - 58x - 15 \geq 0$

+	+	0	-	-	0	+	+
		-5/21			3		

Entonces la solución es $[3, +\infty)$

Ejercicio 14

a) $|2x-1|+x=|x|+3$

En primer lugar se deben eliminar las barras de valor absoluto y para ello es necesario conocer el signo de cada término afectado por esas barras.

$$|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \geq 1/2 \\ -2x+1 \text{ si } x < 1/2 \end{cases} \qquad |x|=\begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces tendremos 3 zonas: $x < 0$, $0 \leq x < \frac{1}{2}$ y $x \geq \frac{1}{2}$

Si $x < 0$: $-2x + 1 + x = -x + 3 \Rightarrow 1 = 3$ es incompatible.

Si $0 \leq x < \frac{1}{2}$: $-2x + 1 + x = x + 3 \Rightarrow x = 1$ que se descarta porque no está en la zona.

Si $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x = x + 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ pertenece a la zona.

La solución es $x = 2$

b) $\frac{3}{|x|}+2x=|x-1|$ Existencia: $x \neq 0$

Nuevamente se presentan 3 zonas: $x < 0$ $0<x<1$ y $x \geq 1$

Si $x < 0$ queda: $\frac{3}{-x}+2x=-x+1 \Rightarrow 3-2x^2=x^2-x \Rightarrow 3x^2-x-3=0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$ pero debe ser $x < 0 \Rightarrow \quad x = \dfrac{1-\sqrt{37}}{6}$

Si $0 < x < 1$ queda: $\dfrac{3}{x} + 2x = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3 + 2x^2 = -x^2 + x$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - x + 3 = 0$ N.T.R.R.

Si $x \geq 1$ queda: $\dfrac{3}{x} + 2x = x - 1 \Rightarrow 3 + 2x^2 = x^2 - x \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0$ N.T.R.R.

c) $|2x+1| - x = 2 - |x-1|$

Se deben considerar 3 zonas: $x < -\dfrac{1}{2}$, $\quad -\dfrac{1}{2} \leq x < 1$ y $x \geq 1$

Si $x < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -2x - 1 - x = 2 + x - 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ que no pertenece a la zona.

Si $-\dfrac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 2x + 1 - x = 2 + x - 1 \Rightarrow x + 1 = x + 1 \Rightarrow$ todo valor de x en esta zona es solución.

Si $x \geq 1 \Rightarrow 2x + 1 - x = 2 - x + 1 \Rightarrow x = 1$ que sirve porque está en la zona.

En resumen, la solución es:

$$\{ \ x \in R : -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \ \}$$

d) $\dfrac{|x-1|}{|x|+2}=\dfrac{x+3}{x-2}$ Existencia: $x \neq 2$

Tenemos 3 zonas: $x < 0$ $\quad 0 \leq x < 1$ $\quad$ y $\quad x \geq 1 \wedge x \neq 2$

Si $x < 0 \Rightarrow \dfrac{-x+1}{-x+2}=\dfrac{x+3}{x-2} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x+3}{x-2} \Rightarrow x - 1 = x + 3$ es incompatible.

Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow \dfrac{-x+1}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-2} \Rightarrow (-x+1)\cdot(x-2) = (x+3)\cdot(x+2) \Rightarrow$

$-x^2+3x-2=x^2+5x+6 \Rightarrow 2x^2+2x+8=0$ N.T.R.R.

Si $x \geq 1 \wedge x \neq 2 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{x+3}{x-2} \Rightarrow (x-1)\cdot(x-2) = (x+3)\cdot(x+2) \Rightarrow$

$x^2-3x+2=x^2+5x+6 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ que no pertenece a la zona.

En resumen, la ecuación no tiene solución.

e) $\dfrac{|x-3|}{x+2}>|x+1|$ Existencia: $x \neq -2$

Dividimos en 3 zonas: $x < -1 \wedge x \neq -2$ $\quad -1 \leq x < 3$ $\quad$ y $\quad x \geq 3$

Si $x < -1 \Rightarrow \dfrac{-x+3}{x+2}>-x-1 \Rightarrow \dfrac{-x+3}{x+2}+x+1>0 \Rightarrow \dfrac{x^2+2x+5}{x+2}>0$

- - ∄ + |
-2 -1

queda $-2 < x < -1$

Si $-1 \leq x < 3 \;\Rightarrow\; \dfrac{-x+3}{x+2} > x+1 \;\Rightarrow\; \dfrac{-x+3}{x+2} - x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{-x^2-4x+1}{x+2} > 0$

\+ \+ 0 - - $\nexists$ + + 0 - - -

$-2-\sqrt{5}$ $\quad -2 \quad -1 \quad -2+\sqrt{5} \quad 3$ queda $-1 \leq x < -2+\sqrt{5}$

Si $x \geq 3 \;\Rightarrow\; \dfrac{x-3}{x+2} > x+1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x-3}{x+2} - x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{-x^2-2x-5}{x+2} > 0$

\+ \+ $\nexists$ - - - - - - -

$-2 \quad 3$ No tiene solución

Solución $\{ x \in R : -2 < x < -2+\sqrt{5} \}$

f) $3 > \dfrac{x-5}{1-\left|\dfrac{x}{2}+3\right|}$

Existencia: $\left|\dfrac{x}{2}+3\right| \neq 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{2}+3 \neq \pm 1 \;\Rightarrow\; x \neq -4 \wedge x \neq -8$

Se deben considerar 2 regiones: $x < -6$ y $x \geq -6$

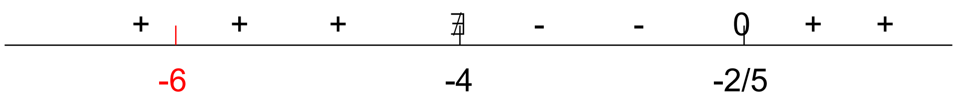
Si $x < -6 \;\Rightarrow\; 3 > \dfrac{x-5}{1+\dfrac{x}{2}+3} \;\Rightarrow\; 3 > \dfrac{2x-10}{x+8} \;\Rightarrow\; \dfrac{2x-10}{x+8} - 3 < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{-x-34}{x+8} < 0$

\- - 0 + + $\nexists$ - - - -

$-34 \quad -8 \quad -6$

se verifica para $x < -34$ y $-8 < x < -6$

Si $x \geq -6 \quad \Rightarrow \quad 3 > \dfrac{x-5}{1-\dfrac{x}{2}-3} \quad \Rightarrow \quad 3 > \dfrac{2x-10}{-x-4} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2x-10}{x+4} + 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5x+2}{x+4} > 0$



se verifica para $-6 \leq x < -4 \;\wedge\; x > -\dfrac{2}{5}$

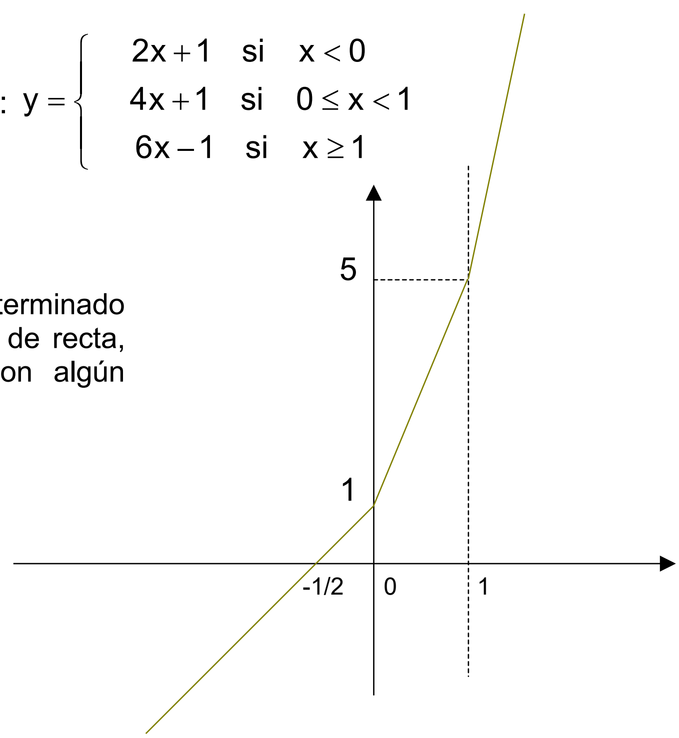
Solución: $\{ x \in R : \; x < -34 \;, \; -8 < x < -4 \;, \; x > -\dfrac{2}{5} \; \}$

Ejercicio 15

a) $y = |x| + 4x + |x-1|$

Dividimos el dominio en 3 zonas: $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4x+1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 6x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

El gráfico de esta función está determinado por dos semirrectas y un segmento de recta, para representarlo es suficiente con algún punto y la pendiente.



b) $y = \left| x^2 - 16 \right| + 5x + 3$

Signo de $x^2 - 16$

+	+	0	-	-	0	+
		-4			4	

$$|x^2 - 16| = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{si } |x| \geq 4 \\ -x^2 + 16 & \text{si } |x| < 4 \end{cases}$$

de donde: $y = \begin{cases} x^2 + 5x - 13 & \text{si } |x| \geq 4 \\ -x^2 + 5x + 19 & \text{si } |x| < 4 \end{cases}$

La función está compuesta por trozos de 2 parábolas, entonces la idea para realizar su R.G. es representar ambas parábolas en un mismo sistema de coordenadas y luego seleccionar los trozos que correspondan de c/u de ellas.

De la parábola $y = x^2 + 5x - 13$ corresponde el trozo donde | x | $\geq$ 4.

Es convexa, tiene ceros: x = $\dfrac{-5 \pm \sqrt{77}}{2} \approx \begin{cases} -6{,}89 \\ 1{,}89 \end{cases}$

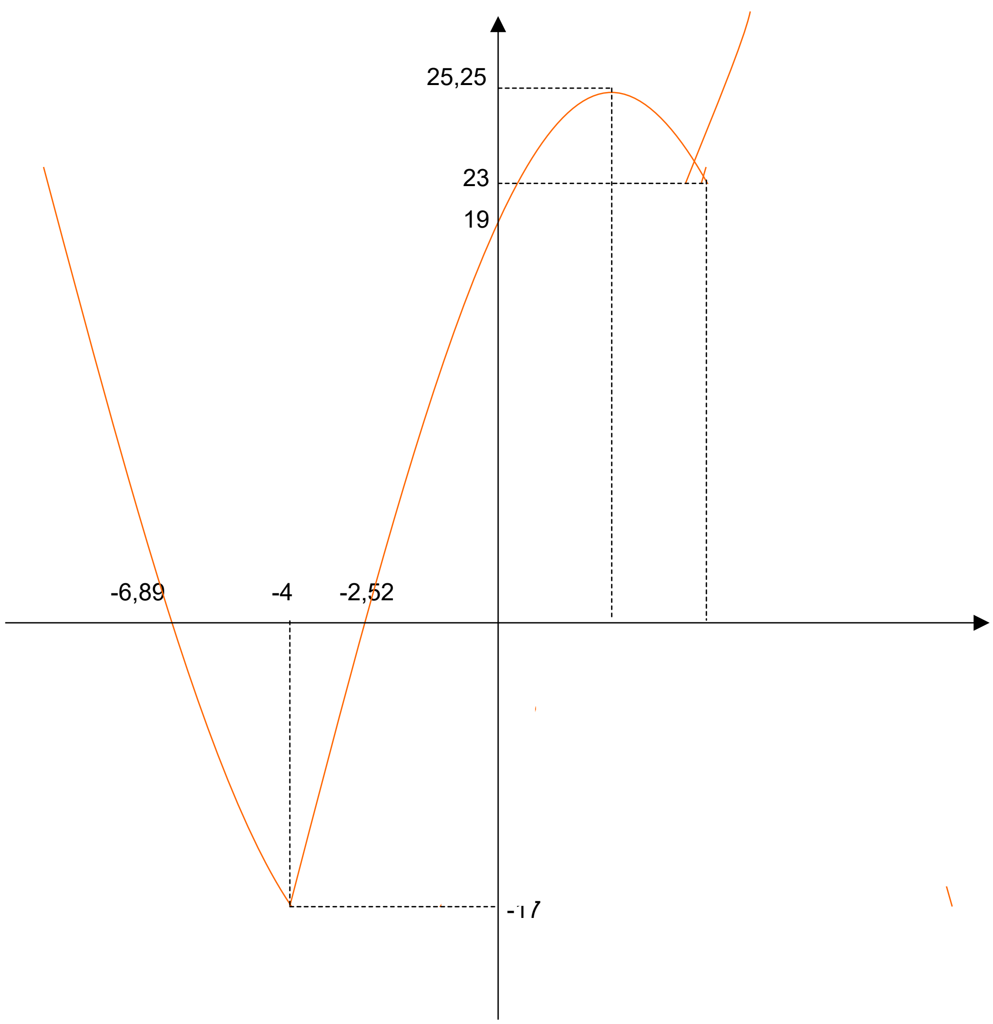
Su vértice tiene abscisa x = $-\dfrac{5}{2}$ y ordenada y = $-\dfrac{77}{4} = -19{,}25$

De la parábola $y = -x^2 + 5x + 19$ corresponde la región donde | x | < 4

Es cóncava, tiene ceros: x = $\dfrac{-5 \pm \sqrt{101}}{-2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{101}}{2} \approx \begin{cases} 7{,}52 \\ -2{,}52 \end{cases}$

Su vértice tiene abscisa x = $\dfrac{5}{2}$ y ordenada y = $\dfrac{101}{4} = 25{,}25$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:



b) $y = \dfrac{|x-2|+x-3}{x-1}$

Existencia: $x \neq 1$ Dividimos el dominio en 2 regiones: $x < 2$ y $x \geq 2$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \\[2ex] \dfrac{2x-5}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

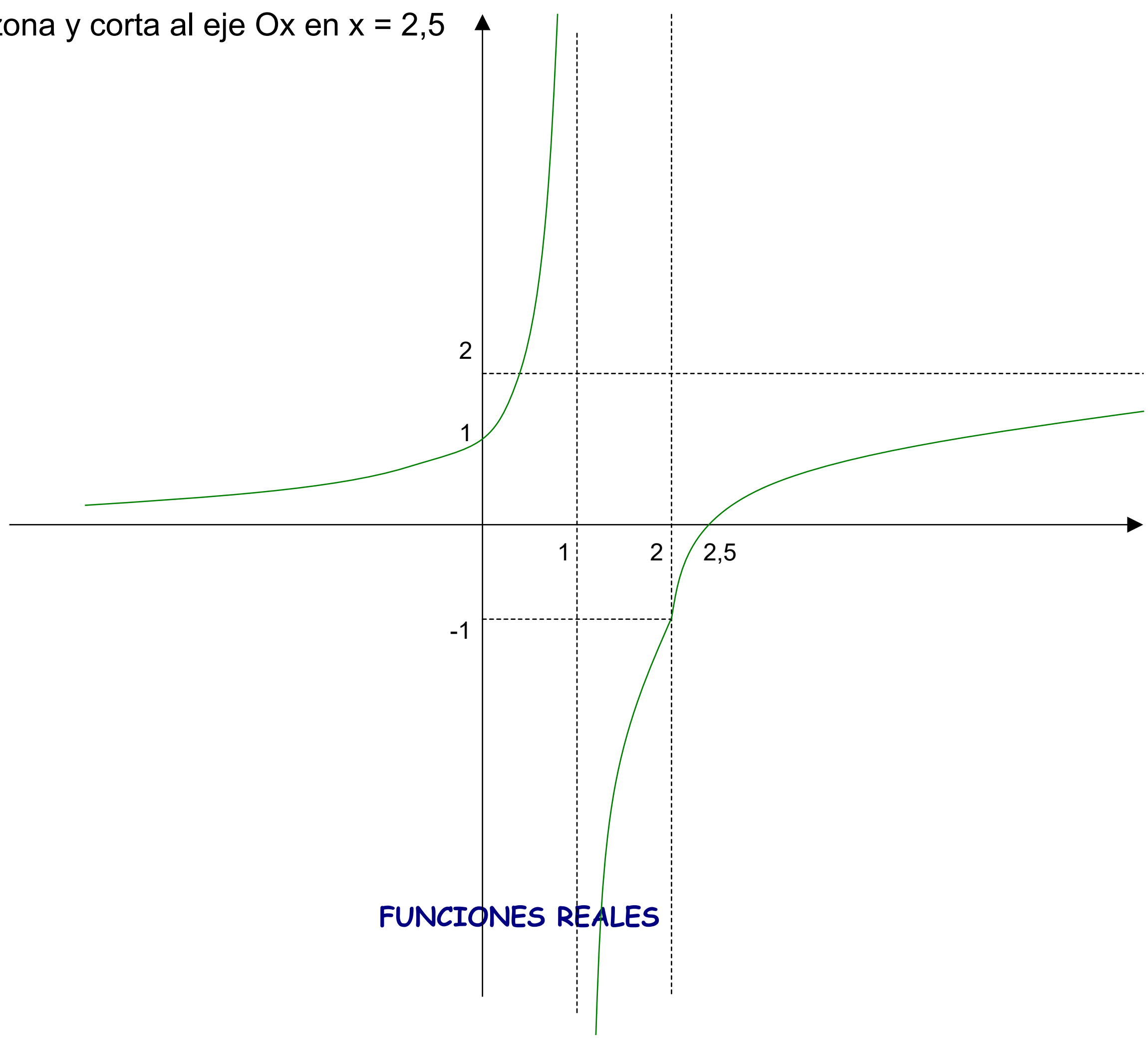
La función está conformada por 2 trozos de hipérbolas. Seguimos la misma idea del ejercicio precedente:

De la hipérbola $y = \dfrac{-1}{x-1}$ corresponde el trozo con $x < 2$

Tiene asíntota horizontal y = 0, asíntota vertical x = 1 y corta al eje Oy en y = 1.

De la hipérbola $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ corresponde la región con $x \geq 2$

Tiene asíntota horizontal y = 2, no tiene asíntota vertical porque x = 1 está fuera de la zona y corta al eje Ox en x = 2,5



16. Representar gráficamente:

(a) $y = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<-1 \\ -x & \text{si} \quad -1<x<1 \\ (x-3)/2 & \text{si} \quad x>1 \\ 0 & \text{si} \quad x=\pm 1 \end{cases}$

(b) $y = \begin{cases} -2x+3 & | \quad x \in (-\infty,-2] \\ 3 & | \quad x \in (-2,0) \\ -x^2+2x & | \quad x \in [0,3] \\ x^2-3x-4 & | \quad x \in (3,5] \end{cases}$

17. Dados los siguientes pares de funciones f y g, se pide:

(a) G(f) y G(g) en un mismo sistema de coordenadas.

(b) Utilizar el método de ábacos para resolver la ecuación f(x)=g(x).

(c) Estudiar ceros, signos y bosquejar la función F:F(x)=f(x)-g(x).

(i) $f(x)=x^2-1 \qquad g(x)=\frac{1}{x}$

(ii) $f(x)=e^x \qquad g(x)=\frac{2x-1}{x-4}$

(iii) $f(x)=L|x| \qquad g(x)=\frac{x}{x+1}$

(iv) $f(x)=x^3 \qquad g(x)=2x+2$

(v) $f(x)=\operatorname{sen} x \qquad g(x)=-x+1$

(vi) $f(x)=\cos x \qquad g(x)=\frac{x}{6}$

(vii) $f(x)=|x| \qquad g(x)=\frac{2x+1}{|x|-1}$

(viii) $f(x)=x^2+x-2 \qquad g(x)=sg(x)$

18. Descubrir un procedimiento para hallar las raíces de polinomios de $3^{er}, 4^{to}$ y 5^{to} grado, utilizando el método de ábacos.

Aplicar esos resultados para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3-x^2+2x-3=0$

(b) $x^4-2x^3+x^2+x-2=0$

(c) $x^5+3x^4-4x^3+x^2-4=0$

19. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $e^{3x}-e^{2x}+2e^x-3=0$

(b) $L^4(x)-2L^3(x)+L^2(x)+L(x)-2=0$

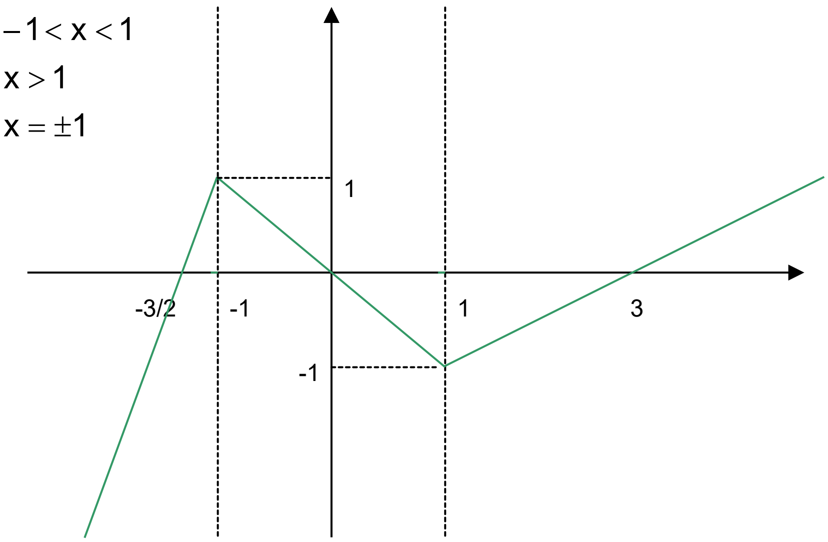
(c) $\operatorname{sen}^5(x)+3\operatorname{sen}^4(x)-4\operatorname{sen}^3(x)+\operatorname{sen}^2(x)-4=0$

RESOLUCIÓN

Ejercicio 16

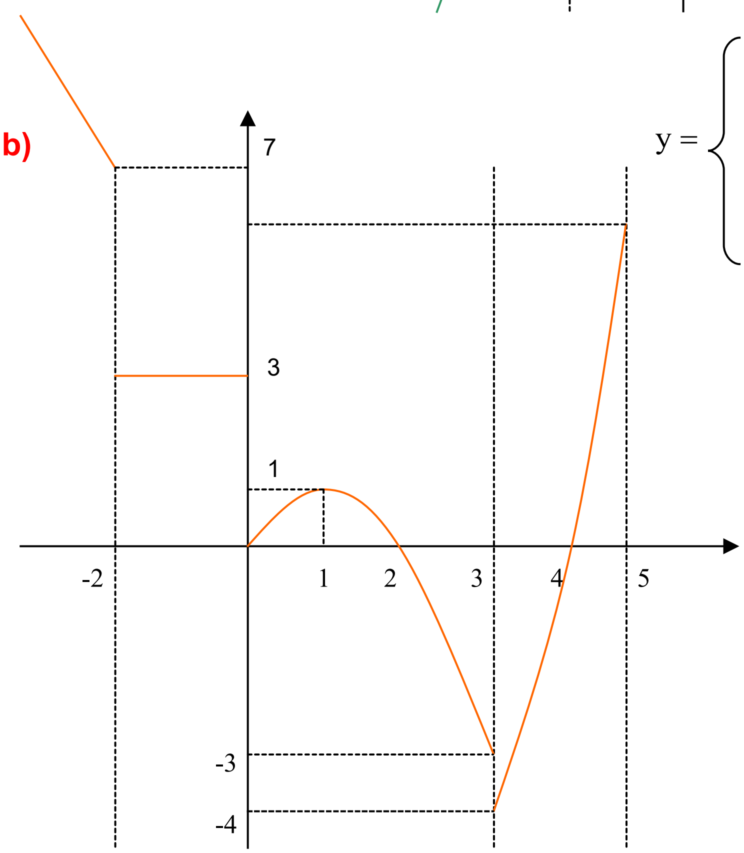
a)

$$y=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x<-1 \\ -x & \text{si} \quad -1<x<1 \\ (x-3)/2 & \text{si} \quad x>1 \\ 0 & \text{si} \quad x=\pm 1 \end{cases}$$



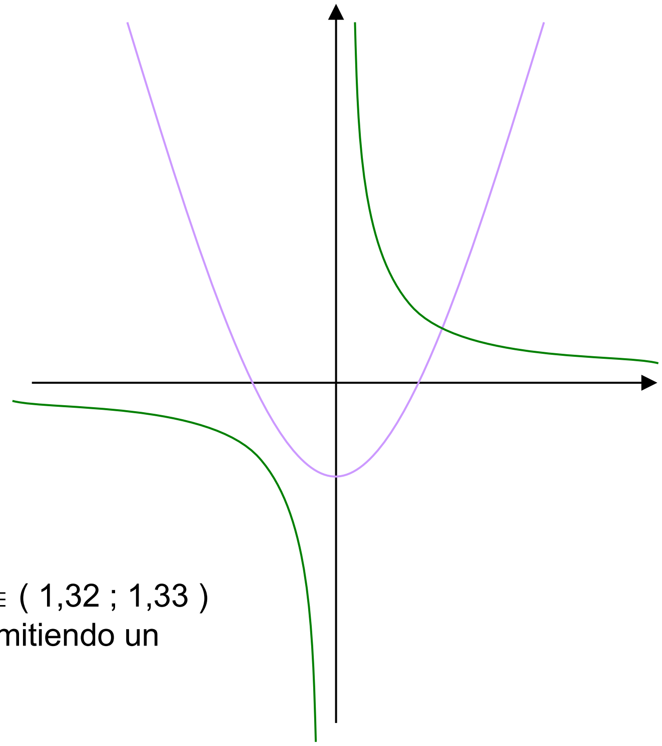
b)

$$y=\begin{cases} -2x+3 & | \quad x\in(-\infty,-2] \\ 3 & | \quad x\in(-2,0) \\ -x^2+2x & | \quad x\in[0,3] \\ x^2-3x-4 & | \quad x\in(3,5] \end{cases}$$



Ejercicio 17

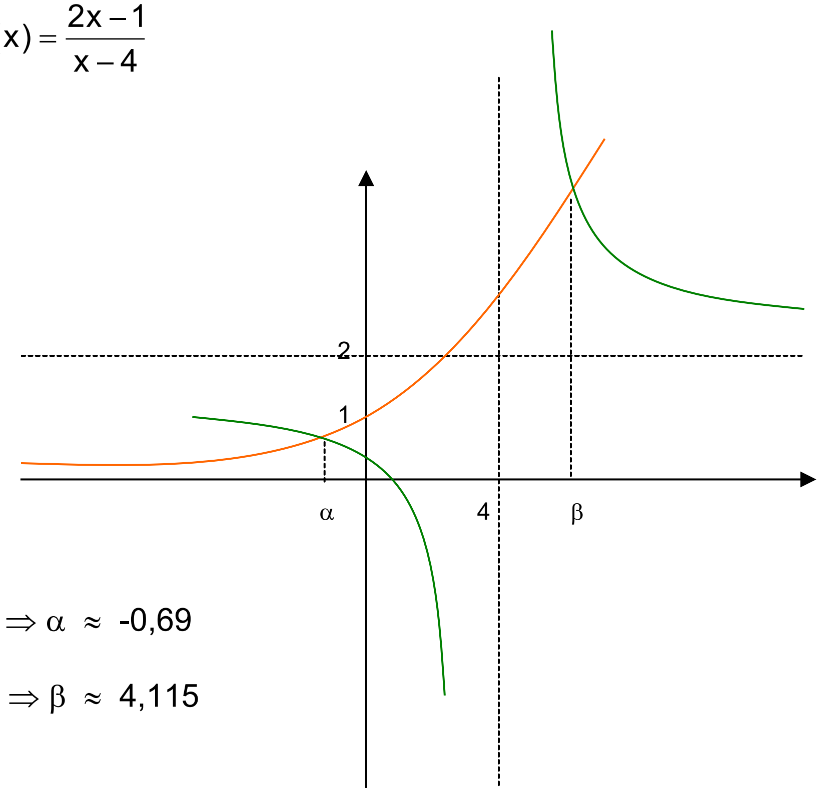
a) $f(x) = x^2 - 1$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$



x	f(x)	g(x)
1.5	1.25	0.66
1.3	0.69	0.77
1.4	0.96	0.71
1.35	0.82	0.74
1.33	0.7689	0.7519
1.32	0.7424	0.7575

La solución es un número $\alpha \in (\ 1{,}32\ ;\ 1{,}33\ )$
Podemos elegir α = 1,325 admitiendo un error de 0,005

b) $f(x) = e^x$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$



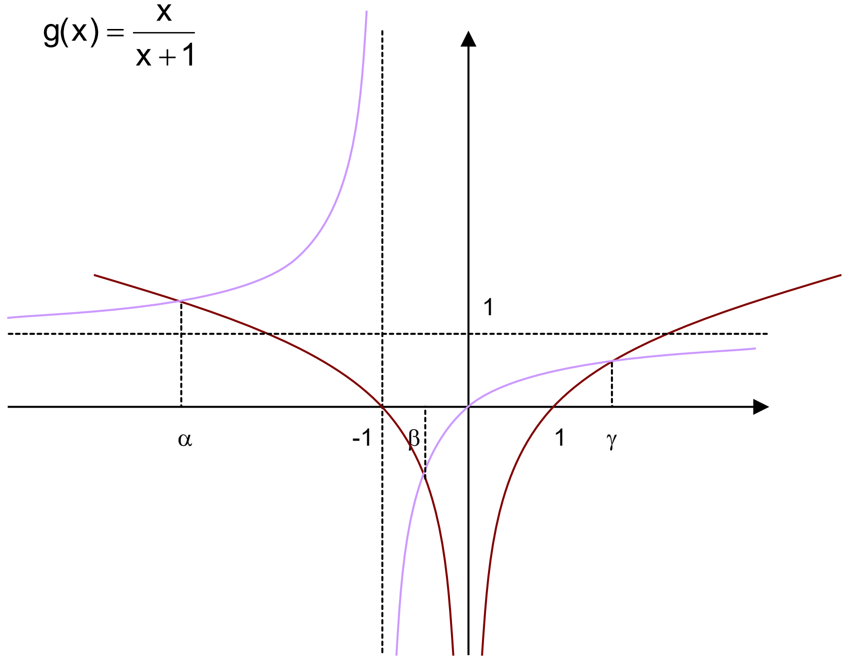
x	f(x)	g(x)
-0.5	0.6	0.44
-0.7	0.496	0.51
-0.66	0.517	0.498
-0.68	0.506	0.500
4.1	60.34	72
4.2	66.68	37
4.15	63.43	48.66
4.12	61.56	60.33
4.11	60.94	65.63

$\alpha \in (\ -0{,}7\ ;\ -0{,}68\ ) \Rightarrow \alpha \approx -0{,}69$

$\beta \in (\ 4{,}11\ ;\ 4{,}12\ ) \Rightarrow \beta \approx 4{,}115$

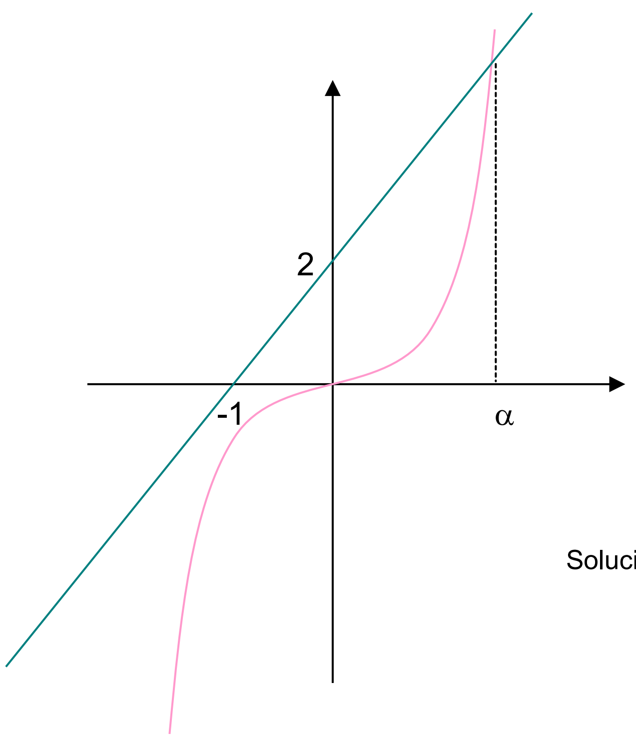
Desafío: intenta mejorar la aproximación de las soluciones.

c) $f(x) = L\,|\,x\,|$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{x+1}$



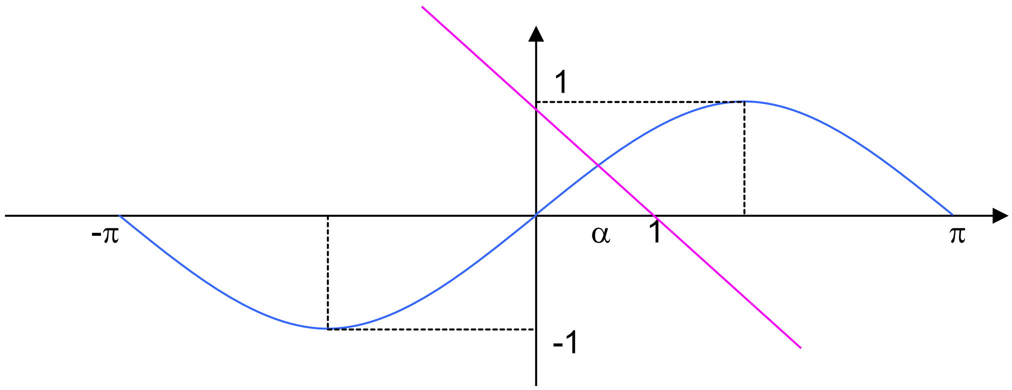
.

d) $f(x) = x^3$ $\qquad g(x) = 2x + 2$



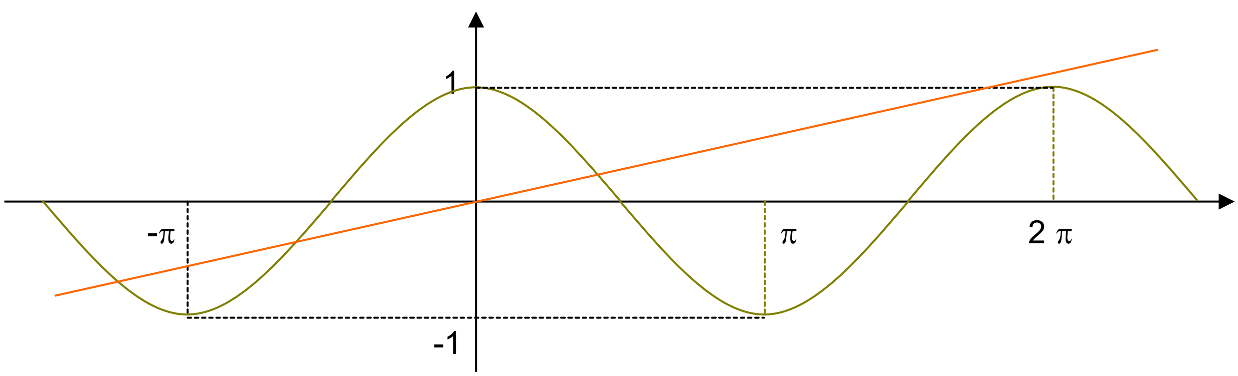
Solución: $\alpha \approx 1{,}77$

e) $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad g(x) = -x + 1$



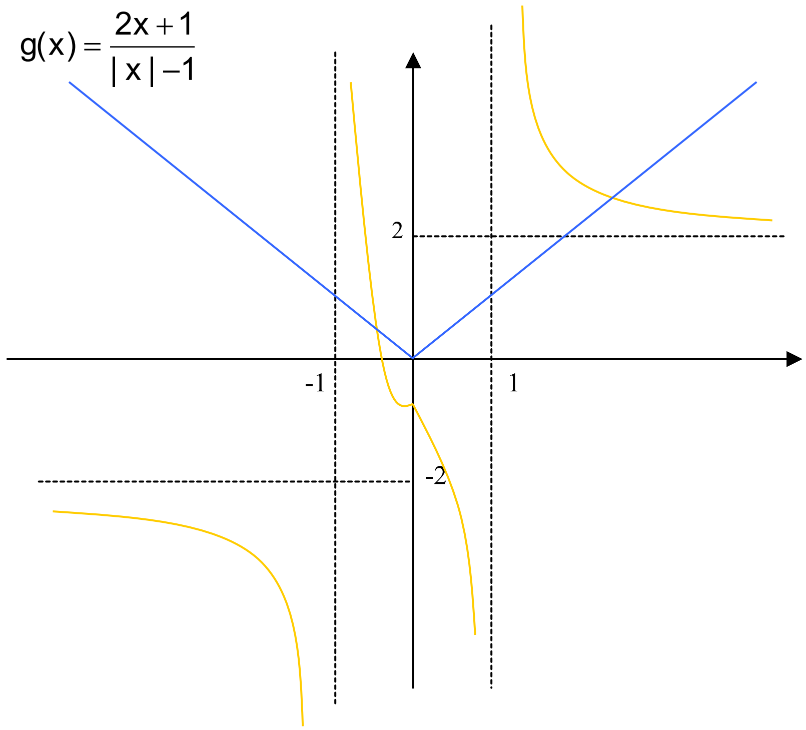
Solución: $\alpha \approx 0.51$

f) $f(x) = \cos x \qquad g(x) = \dfrac{x}{6}$



Solución: $\alpha \approx -3.99 \quad \beta \approx -1.89 \quad \gamma \approx 1.34$

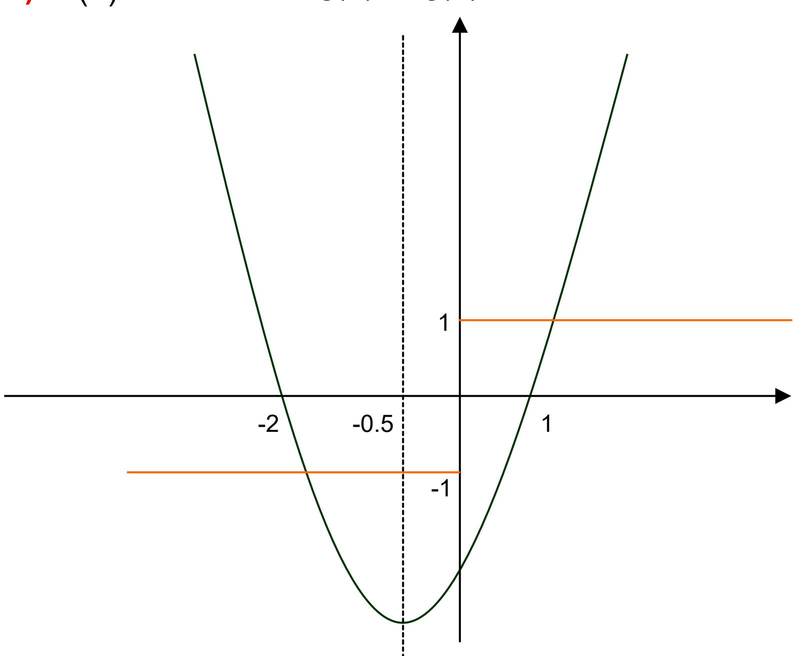
g) $f(x)=|x|$ $\qquad g(x)=\dfrac{2x+1}{|x|-1}$



.

Solución: $\alpha \approx -0.61 \quad \beta \approx 3.30$

h) $f(x)=x^2+x-2 \qquad g(x)=sg(x)$



Solución: $\alpha \approx -1.62 \quad \beta \approx 1.30$

Ejercicio 18

Este ejercicio está resuelto en el capítulo de funciones continuas (ver páginas 239 a 241), las soluciones son:

a) $\{ x \in R : x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0 \} = \{ 1.27 \}$

b) $\{ x \in R : x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = 0 \} = \{ -0.897 \ ; \ 1.49 \}$

c) $\{ x \in R : x^5 + 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 4 = 0 \} = \{ -4.037 \ ; \ -0.83 \ ; \ 1.25 \}$

Ejercicio 19

La resolución de este ejercicio está estrechamente vinculada a la del ejercicio 18.

Mediante un cambio de variable adecuado, cada una de estas ecuaciones se transforma en la correlativa del ejercicio 18.

a) $e^{3x} - e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$

Con el cambio de variable z = e^x

se transforma en: $z^3 - z^2 + 2z - 3 = 0$ cuya solución es z = 1.27

Deshaciendo el cambio de variable x = Lz

$$x = L(1.27) = 0.239$$

b) $L^4(x) - 2L^3(x) + L^2(x) + L(x) - 2 = 0$

Con el cambio de variable z = L(x) se transforma en:

$z^4 - 2z^3 + z^2 + z - 2 = 0$, que tiene solución { -0.897 ; 1.49 }

Deshacemos el cambio de variable con x = e^z quedan las soluciones

$$x = e^{-0.897} = 0.408 \quad ; \quad x = e^{1.49} = 4.437$$

c) $\operatorname{sen}^5(x) + 3\operatorname{sen}^4(x) - 4\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 4 = 0$

Se resuelve con el cambio de variable z = sen(x), que transforma la ecuación en:

$z^5 + 3z^4 - 4z^3 + z^2 - 4 = 0$ cuyas soluciones son: { -4.037 ; -0.83 ; 1.25 }

Deshaciendo el cambio de variable: x = Arcsen(z), de las soluciones obtenidas la única que pertenece al dominio de la función Arcsen es –0.83,

entonces la solución es

$$x = \operatorname{Arcsen}(-0.83) = -0.979$$