Ejercicio 6
Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que que:

(a) Ningún dígito está en su posición original. ⇝ desórdenes de 9

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

a) cantidad de permutaciones de 123456789 tales que ningún dígito quede en su posición original

123456978 X

$S = \{$ permutaciones de 123456789 $\}$

$|S| = 9!$

c_1 = permutación donde el 1 queda en la primer posición

c_i = permutación donde el dígito i queda en su posición original

buscamos $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 \bar{c}_7 \bar{c}_8 \bar{c}_9)$

$N(c_1) = 8!$

$\underline{1}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{permutación de } 23456789}$

$\boxed{N(c_i) = 8!}$

$\_\ \_\ \_\ \underline{4}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$N(c_1 c_2) = 7!$ $\boxed{N(c_i c_j) = 7!}$

$\underline{1}\ \underline{2}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{permutación de } 3456789}$

$N(c_1 c_2 c_3) = 6!$ $\boxed{N(c_i c_j c_k) = 6!}$

$\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{permutación de } 456789}$

$\boxed{N(c_i c_j c_k c_t) = 5!}$

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6 \bar{c}_7 \bar{c}_8 \bar{c}_9) = |S| - \sum_{1\le i\le 9} \overbrace{N(c_i)}^{8!} + \sum_{1\le i<j\le 9} \overbrace{N(c_i c_j)}^{7!} - \sum_{1\le i<j<k\le 9} \overbrace{N(c_i c_j c_k)}^{6!} +$$

$$\sum_{1\le i<j<k<t\le 9} N(c_i c_j c_k c_t) - \dots - N(c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9)$$

$$= 9! - C_1^9 \cdot 8! + C_2^9 \cdot 7! - C_3^9 \cdot 6! + C_4^9 \cdot 5!$$

$$- C_5^9\, 4! + C_6^9 \cdot 3! - C_7^9 \cdot 2! + C_8^9 \cdot 1! - 1$$

$$= 133496$$

Ejercicio 7

Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?

$\underbrace{\quad}_{1}$ $\underbrace{\quad}_{2}$ $\underbrace{\quad}_{3}$ $\underbrace{\quad}_{4}$

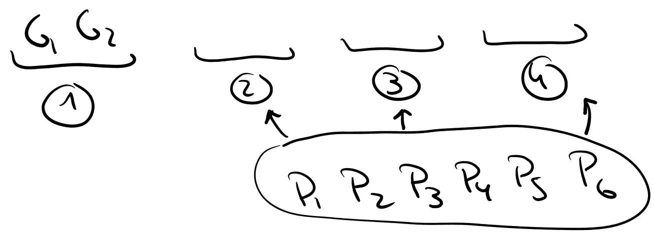
$G_1\ G_2 \qquad P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6$

CASO 1: los dos gatos van al mismo escondite

etapa 1: elegimos el escondite donde van los gatos

$C_1^4 = 4$ formas

<u>etapa</u> 2: distribuimos los perros



$$f: \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} \to \{2, 3, 4\}$$

$f(P_1)$ = el escondite al que va el primer perro

$f(P_i)$ = el escondite donde va el perro numero i

f tiene que ser una función sobreyectiva

$Sob(6,3)$ formas

total del caso 1: $4\,Sob(6,3)$

$$Sob(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n (n-k)^m$$

$c_i = i \notin Im(f)$

$N(c_i) = (n-1)^m$

<u>CASO 2</u>: los dos gatos van a escondites diferentes

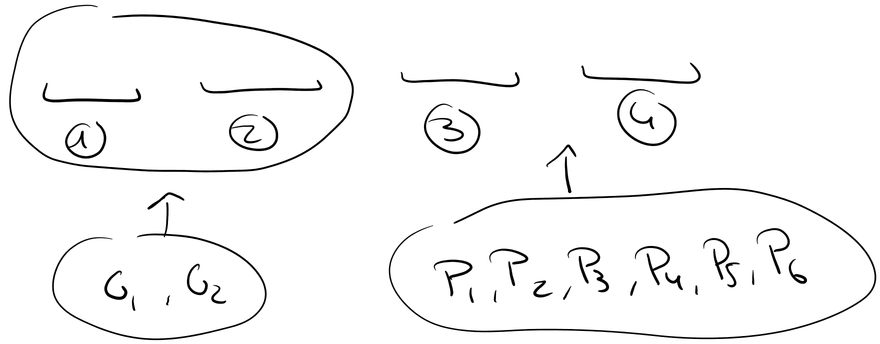
<u>etapa 1</u>: elegimos los dos escondites donde van los gatos

C_2^4 formas

etapa 2: distribuimos los gatos en los dos escondites elegidos

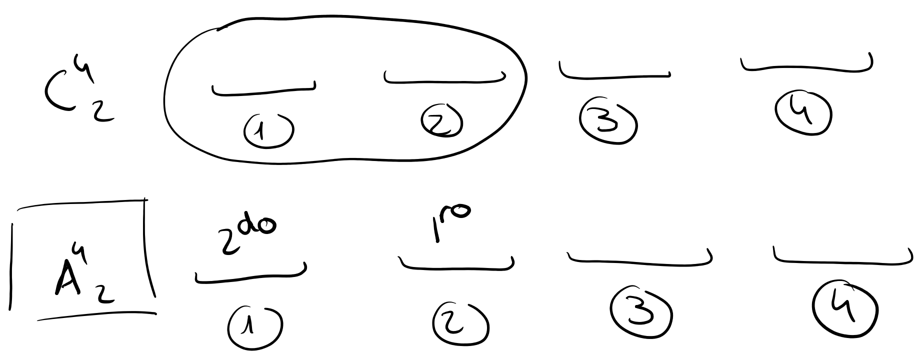
$C^4_2 \cdot 2 = \frac{4!}{2!\cancel{2}!}\cancel{2}$

$= \frac{4!}{2!} = A^4_2$



2 formas

otra forma de hacer las etapas 1 y 2:



etapa 3: distribuimos los perros

$f: \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} \longrightarrow \{3, 4\}$ sobreyectiva

$Sob(6,2)$ formas

total del caso 2: $C^4_2 \cdot 2 \cdot Sob(6,2)$

Por la regla de la suma la cantidad de formas es

$$4 \cdot Sob(6,3) + C^4_2 \cdot 2\, Sob(6,2)$$

Múltiple Opción 1 – Primer parcial 2023

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \le x_1 \le 6$, $-2 \le x_2 \le 6$, $x_3 \ge 5$.

Sugerencia: aplicar cambios de variables adecuados para que todas las variables sean

Múltiple Opción 1 - Primer parcial 2023

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $x_3 \geq 5$.

Sugerencia: aplicar cambios de variables adecuados para que todas las variables sean enteras y no negativas.

(A) 41; D) 71
(B) 51;
(C) 61; E) 81

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \quad \begin{cases} -2 \leq x_1 \leq 6 \\ -2 \leq x_2 \leq 6 \\ 5 \leq x_3 \end{cases}$$

$$-2 \leq x_1 \leq 6 \rightsquigarrow -2+2 \leq x_1 + 2 \leq 6+2$$

$$0 \leq x_1 + 2 \leq 8$$

$$y_1 = x_1 + 2 \longrightarrow 0 \leq y_1 \leq 8$$

$$\searrow x_1 = y_1 - 2$$

$$-2 \leq x_2 \leq 6 \rightsquigarrow 0 \leq x_2 + 2 \leq 8$$

$$y_2 = x_2 + 2 \longrightarrow 0 \leq y_2 \leq 8$$

$$\searrow x_2 = y_2 - 2$$

$$5 \leq x_3 \rightsquigarrow 0 \leq x_3 - 5$$

$$y_3 = x_3 - 5 \longrightarrow 0 \leq y_3$$

$$\searrow x_3 = y_3 + 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \Rightarrow (y_1 - 2) + (y_2 - 2) + (y_3 + 5) = 17$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 - 2 - 2 + 5 = 17$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 16$$

$$\boxed{y_1+y_2+y_3=16 \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0\le y_1\le 8 \\ 0\le y_2\le 8 \\ 0\le y_3 \end{cases}}$$

$S=\{$soluciones de $y_1+y_2+y_3=16$ con $\underbrace{0\le y_1}, \underbrace{0\le y_2}, \underbrace{0\le y_3}\}$

$|S|=CR^3_{16}$

c_1: solucion con $y_1\geq 9$ $\qquad N(\overline{c_1}\,\overline{c_2})=?$

c_2: solucion con $y_2\geq 9$

$N(c_1)=CR^3_7$

cantidad de soluciones de $y_1+y_2+y_3=16$ con $y_1\geq 9,\ y_2\geq 0,\ y_3\geq 0$

igual a la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=7 \quad \text{con } y_1, y_2, y_3\geq 0$$

$N(c_2)=CR^3_7$

cantidad de soluciones de $y_1+y_2+y_3=16$ con $y_1\geq 0,\ y_2\geq 9,\ y_3\geq 0$

igual a la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=7 \quad \text{con } y_1, y_2, y_3\geq 0$$

$N(c_1c_2)=0$

cantidad de soluciones de $y_1+y_2+y_3=16$ con $y_1\geq 9,\ y_2\geq 9,\ y_3\geq 0$

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2})=|S|-N(c_1)-N(c_2)+N(c_1c_2)$$
$$=CR^3_{16}-CR^3_7-CR^3_7+0$$

$= CR_{16}^{3} - 2CR_{7}^{3}$

$= C_{16}^{3+16-1} - 2C_{7}^{3+7-1}$

$= C_{16}^{18} - 2C_{7}^{9}$

$= \frac{18!}{16!\,2!} - 2\frac{9!}{7!\,2!}$

$= \frac{\overset{9\cdot\cancel{2}}{\cancel{18}}\cdot 17\cdot\cancel{16!}}{\cancel{16!}\,\cancel{2!}} - \cancel{2}\,\frac{9\cdot 8\cdot\cancel{7!}}{\cancel{7!}\,\cancel{2!}}$

$= 9\cdot 17 - 9\cdot 8$

$= 9(17-8)$

$= 9\cdot 9$

$= 81$