Ejercicio 2
Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

x_1 = resultado de la primer tirada

x_2 = resultado de la segunda tirada

$\vdots$

x_6 = resultado de la sexta tirada

$\boxed{1 \leq x_i \leq 6}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \text{multiplo de } 18$$

CASO 1: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 36$ con $1 \leq x_i \leq 6$

hay una unica solución: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 6$

CASO 2: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18$ con $1 \leq x_i \leq 6$

$1 \leq x_i \leq 6 \rightsquigarrow 1-1 \leq x_i - 1 \leq 6-1 \rightsquigarrow 0 \leq x_i - 1 \leq 5$

definimos $y_i = x_i - 1$ $\quad 0 \leq y_i \leq 5$

$x_i = y_i + 1$ $\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 5$ con $0 \leq x_i$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18 \Rightarrow$$

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) + (y_6 + 1) = 18$$

$$\boxed{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 \quad \text{con } 0 \leq y_i \leq 5}$$

$S = \{$soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12$ con $0 \leq y_i\}$

$|S| = CR^6_{12}$

c_1 : soluciones donde $y_1 \geq 6$

c_2 : soluciones donde $y_2 \geq 6$

c_i : soluciones donde $y_i \geq 6$

buscamos $N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6)$

$N(c_1)$:

\# soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12$ con $y_1 \geq 6$, $y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$

tiene la misma cantidad de soluciones que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 6 \text{ con } y_i \geq 0$$

$$N(c_1) = CR_6^6$$

$N(c_2)$:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 \text{ con } y_2 \geq 6, \ y_1, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

$$N(c_2) = CR_6^6$$

$$\boxed{N(c_i) = CR_6^6}$$

$N(c_1 c_2)$:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 \text{ con } y_1 \geq 6, \ y_2 \geq 6, \ y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$$

1 solución

$$N(c_1 c_2) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{c} N(c_i c_j) = 1 \\ i \neq j \end{array}}$$

$N(c_1 c_2 c_3) =$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12$ con $y_1 \geq 6,\ y_2 \geq 6,\ y_3 \geq 6,\ y_4, y_5, y_6 \geq 0$

0 soluciones

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N(c_i c_j c_k) = 0 \\ i \neq j \neq k \end{array}}$$

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4 \bar{c}_5 \bar{c}_6) = |S| - \sum_{1 \leq i \leq 6} \overbrace{N(c_i)}^{CR_6^6} + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \overbrace{N(c_i c_j)}^{1} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} \overbrace{N(c_i c_j c_k)}^{=0}$$

$$= CR_{12}^6 - 6\, CR_6^6 + C_2^6 \cdot 1$$

$$= C_{12}^{6+12-1} - 6\, C_6^{6+6-1} + C_2^6$$

$$= C_{12}^{17} - 6\, C_6^{11} + C_2^6$$

Por la regla de la suma, el total es

$$\overbrace{C_{12}^{17} - 6\, C_6^{11} + C_2^6}^{\text{CASO 2}} + \overbrace{1}^{\text{CASO 1}}$$

$$\sum_{i=1}^{6} N(c_i) = \overbrace{N(c_1)}^{CR_6^6} + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4) + N(c_5) + N(c_6) = 6 \cdot CR_6^6$$

$$\underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq 6}}_{C_2^6 \text{ sumandos}} \overbrace{N(c_i c_j)}^{=1} =$$

Ejercicio 5
Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

→ (c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=19 \quad \text{con} \begin{cases} 0 < x_1 \leq 4 & \longleftrightarrow \quad 1 \leq x_1 \leq 4 \\ 1 < x_2 < 5 & \longleftrightarrow \quad 2 \leq x_2 \leq 4 \\ 3 \leq x_3 \leq 7 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \end{cases}$$

$0 \leq y_i$

tiene la misma cantidad de soluciones que:

$1 \leq x_1 \leq 4 \rightsquigarrow 1-1 \leq \underbrace{x_1-1}_{} \leq 4-1$

$y_1 = x_1 - 1 \qquad 0 \leq y_1 \leq 3$

$x_1 = y_1 + 1$

$2 \leq x_2 \leq 4 \rightsquigarrow y_2 = x_2 - 2$

$0 \leq y_2 \leq 2 \qquad x_2 = y_2 + 2$

$3 \leq x_3 \leq 7 \rightsquigarrow y_3 = x_3 - 3$

$0 \leq y_3 \leq 4 \qquad x_3 = y_3 + 3$

$y_4 = x_4 \qquad 0 \leq y_4 \leq 8$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$

$(y_1+1) + (y_2+2) + (y_3+3) + y_4 = 19$

$$\boxed{y_1+y_2+y_3+y_4 = 13 \quad \text{con} \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 3 \\ 0 \leq y_2 \leq 2 \\ 0 \leq y_3 \leq 4 \\ 0 \leq y_4 \leq 8 \end{cases}}$$

$S = \{\text{soluciones de } y_1+y_2+y_3+y_4=13 \text{ con } \underline{y_i \geq 0}\}$

$|S| = CR^4_{13}$

c_1: soluciones con $y_1 \geq 4$

c_2: soluciones con $y_2 \geq 3$

c_3: soluciones con $y_3 \geq 5$

c_4: soluciones con $y_4 \geq 9$

$N(c_1)$:

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_1 \geq 4,\ y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 9 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

$$N(c_1) = CR^4_9$$

$N(c_2) = CR^4_{10}$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_2 \geq 3,\ y_1, y_3, y_4 \geq 0$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 10 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

$N(c_3) = CR^4_8$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_3 \geq 5,\ y_1, y_2, y_4 \geq 0$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 8 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

$N(c_4) = CR^4_4$

$$y_1+y_2+y_3+y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_4 \geq 9,\ y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_4 \geqslant 9, \; y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4 \quad \text{con} \quad y_i \geqslant 0$$

c_1: soluciones con $y_1 \geqslant 4$

c_2: soluciones con $y_2 \geqslant 3$

c_3: soluciones con $y_3 \geqslant 5$

c_4: soluciones con $y_4 \geqslant 9$

$N(c_1 c_2) = CR_6^4$

$N(c_1 c_3) = CR_4^4$

$N(c_1 c_4) = CR_0^4 = 1$

$N(c_2 c_3) = CR_5^4$

$N(c_2 c_4) = CR_1^4$

$N(c_3 c_4) = 0$

$N(c_1 c_2)$:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_1 \geqslant 4, \; y_2 \geqslant 3, \; y_3 \geqslant 0, \; y_4 \geqslant 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6 \quad \text{con} \quad y_i \geqslant 0$$

$N(c_1 c_2 c_3) = CR_1^4$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_1 \geqslant 4, \; y_2 \geqslant 3, \; y_3 \geqslant 5, \; y_4 \geqslant 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \quad \text{con} \quad y_i \geqslant 0$$

$N(c_1 c_3 c_4) = 0$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13 \quad \text{con} \quad y_1 \geqslant 4, \; y_2 \geqslant 0, \; y_3 \geqslant 5, \; y_4 \geqslant 9$$

no hay soluciones

$N(c_2 c_3 c_4) = 0$

$N(c_1 c_2 c_4) = 0$

$N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$

$$N(c_1c_2c_3c_4) = 0$$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4) = |S| - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + N(c_4)) + (N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_1c_4)$$
$$+ N(c_2c_3) + N(c_2c_4) + N(c_3c_4)) - (N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_3c_4)$$
$$+ N(c_2c_3c_4) + N(c_1c_2c_4)) + N(c_1c_2c_3c_4)$$

Ejercicio 4

¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

0000001
0000019

x_1 = primer digito

x_2 = segundo digito $\qquad 0 \leq x_i \leq 9$

⋮

x_7 = septimo digito

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31 \quad \text{con} \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

$S = \{$ soluciones de $x_1 + \dots + x_7 = 31$ donde $0 \leq x_i \}$

c_1 = soluciones con $x_1 \geq 10$

c_i : soluciones con $x_i \geq 10$

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4\bar{c}_5\bar{c}_6\bar{c}_7) = ?$$