Ejercicio 14
Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.

$Sob(m,i)$ = cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto con m elementos en un conjunto con i

$n^m =$

$f : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ sin restricciones

$f(1) \rightsquigarrow n$ posibilidades

$f(2) \rightsquigarrow n$ posibilidades

$f(3) \rightsquigarrow n$ posibilidades

$\vdots$

$f(m) \rightsquigarrow n$ posibilidades

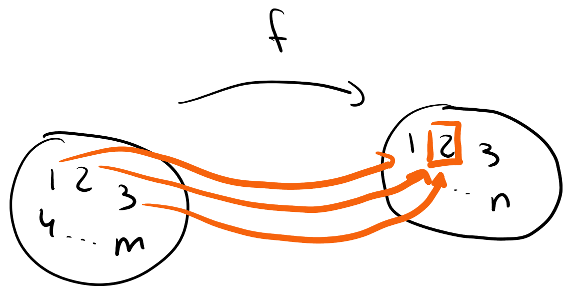
por la regla del producto hay n^m funciones de $\{1, \dots, m\}$ en $\{1, \dots, n\}$

Queremos ver que la cantidad de funciones de $\{1 \dots, m\}$ en $\{1, \dots, n\}$ es

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$$

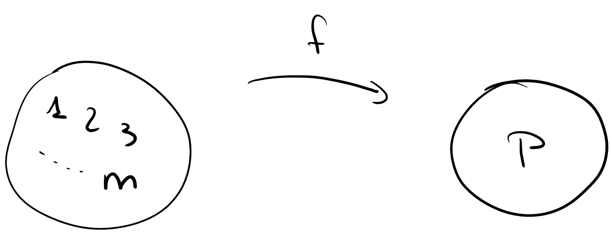
regla del producto

regla de la suma



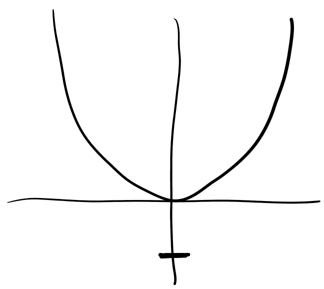
Si $i = 1$

$$\binom{n}{1} \underbrace{Sob(m, 1)}$$



$$f(1)=f(2)=f(3)=\dots=f(m)=p$$

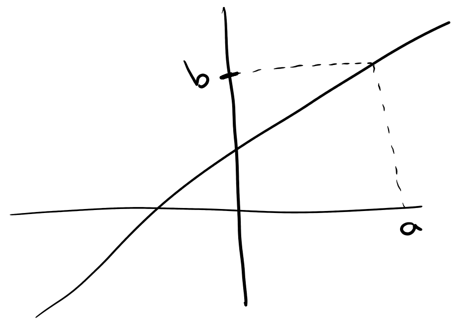
$f: A \to B$ sobreyectiva si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a)=b$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x)=x^2$

no es sobreyectiva



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

es sobreyectiva

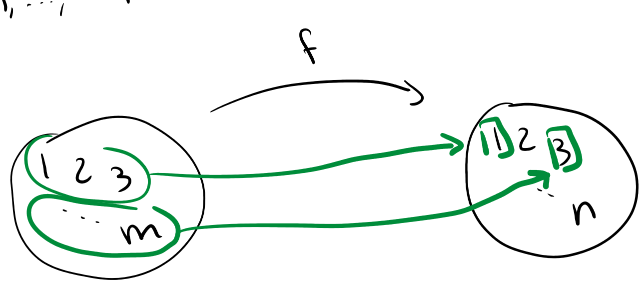
CASO 1: $f: \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ que sean constante, es decir tales que la imágen de f tiene un solo elemento.

$Sob(m,1)$ = cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto con m elementos en un conjunto con 1 elementos

$\binom{n}{1} = C_1^n$

$$\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{elegimos el elemento que está en la imágen de } f} \cdot \underbrace{1}_{\text{cantidad de funciones de } \{1,\dots,m\} \text{ en un conjunto con un solo elemento}}$$

CASO 2: $f: \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ tales que la imágen tiene 2 elementos



1ra etapa: elegimos los dos elementos que están en la imágen

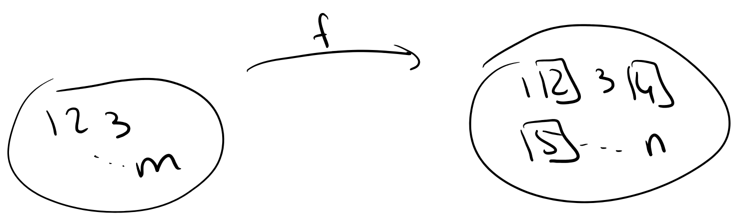
$\binom{n}{2}$ formas

2da etapa: elegimos una función sobreyectiva de $\{1, \dots, m\}$ en el conjunto formado por los dos elementos elegidos

$Sob(m, 2)$ formas

Total del CASO 2: $\binom{n}{2} Sob(m, 2)$

CASO 3: $f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ tales que la imágen tiene 3 elementos



1ra etapa: elegimos los 3 elementos que están en la imágen

$\binom{n}{3}$ formas

2da etapa: elegimos una función sobreyectiva de $\{1, 2, \dots, m\}$ en el conjunto formado por los tres elementos que elegimos

$Sob(m, 3)$ formas

total del caso 3: $\binom{n}{3} Sob(m, 3)$

CASO i : $f:\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ tales que la imágen tiene i elementos

$$\underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{elegimos los } i \text{ elementos que están en la imágen}} \underbrace{Sob(m,i)}_{\text{cantidad de funciones sobreyectivas de } \{1,\dots,m\} \text{ en un conjunto con } i \text{ elementos}}$$

CASO n : $f:\{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ tales que la imágen tiene n elementos

$$\binom{n}{n} Sob(m,n)$$

Entonces por la regla de la suma la cantidad de funciones de $\{1,\dots,m\}$ en $\{1,\dots,n\}$ es

$$\binom{n}{1} Sob(m,1) + \binom{n}{2} Sob(m,2) + \binom{n}{3} Sob(m,3) + \dots + \binom{n}{n} Sob(m,n)$$

$$\Rightarrow n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m,i)$$

(b) $Sob(m+1,n) = n(Sob(m,n-1) + Sob(m,n))$.

(c) $S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n)$.

$S(m,n)$ = numero de Sterling
= cantidad de formas de dividir un conjunto de m elementos en n subconjuntos

$Sob(m,n) = S(m,n)\, n!$

Practico 3 : Principio de inclusión exclusión

S un conjunto

$|S| = \#S = card(S) =$ cantidad de elementos de S

$c_1, c_2, \dots, c_r$ condiciones que pueden verificar o no los elementos de S

$N(c_i) =$ la cantidad de elementos que verifican c_i

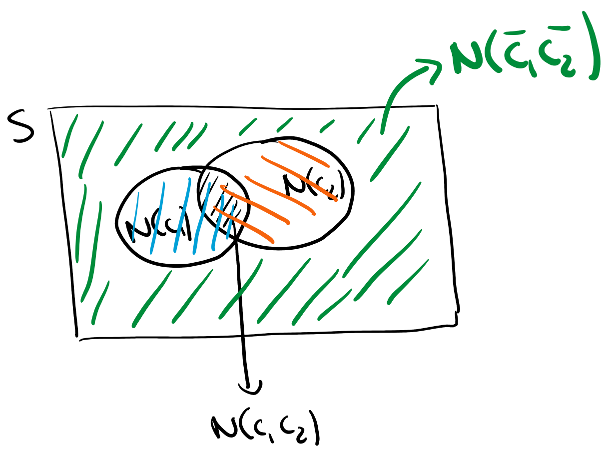
$N(c_i c_j) =$ la cantidad de elementos que verifican c_i y c_j $\quad i \neq j$

$N(c_i c_j c_k) =$ ______ c_i, c_j y c_k $\quad i \neq j \neq k$

$N(\overline{c_i}) =$ la cantidad de elementos que <u>no</u> verifican c_i

$N(\overline{c_i}\,\overline{c_j}) =$ la cantidad de elementos que no verifican ni c_i ni c_j $\quad i \neq j$

$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2} \cdots \overline{c_r}) = ?$



cantidad de elementos de S que verifican al menos una entre c_1 y c_2

$$N(c_1) + N(c_2) - N(c_1 c_2)$$

cantidad de elementos de S que no verifican ni c_1 ni c_2

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}) &= |S| - (N(c_1) + N(c_2) - N(c_1 c_2)) \\ &= |S| - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) \\ &= |S| - (N(c_1) + N(c_2)) + N(c_1 c_2) \end{aligned}$$

En general:

$$\underbrace{N(\bar{c}_1\bar{c}_2\cdots\bar{c}_r)}_{\text{los que no verifican ni } c_1, \text{ ni } c_2 \cdots} = |S| - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots N(c_r))$$
$$+ (N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + \cdots + N(c_{r-1}c_r))$$
$$- (N(c_1c_2c_3) + N(c_1c_2c_4) + \cdots + N(c_{r-2}c_{r-1}c_r))$$
$$+ \cdots\cdots$$

Ejercicio 1

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

$S = \{1, 2, \ldots, 105\}$

$|S| = 105$

condición c_1: ser multiplo de 3
condición c_2: ser multiplo de 5
condición c_3: ser multiplo de 7

buscamos $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3)$

$$N(c_1) = \left\lfloor \frac{105}{3} \right\rfloor = 35$$

$\{\underbrace{1,2,3}, \underbrace{4,5,6}, 7\}$

$$N(c_2) = \left\lfloor \frac{105}{5} \right\rfloor = 21$$

$$N(c_3) = \left\lfloor \frac{105}{7} \right\rfloor = 15$$

$$N(c_1c_2) = \left\lfloor \frac{105}{15} \right\rfloor = 7$$

multiplos de 3 y de 5

$$N(c_1 c_3) = \left\lfloor \frac{105}{21} \right\rfloor = 5$$

multiplos de 3 y de 7

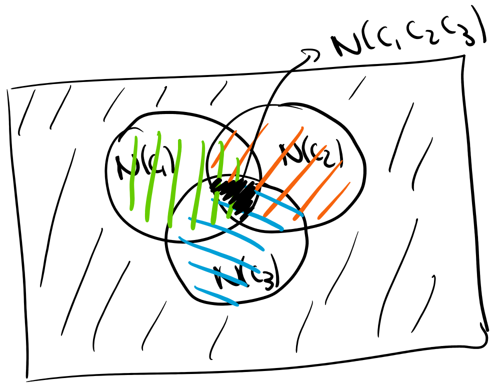
$$N(c_2 c_3) = \left\lfloor \frac{105}{35} \right\rfloor = 3$$

multiplos de 5 y de 7

$$N(c_1 c_2 c_3) = \left\lfloor \frac{105}{105} \right\rfloor = 1$$

multiplos de 3, de 5 y de 7 $\quad 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}) = |S| - (N(c_1) + N(c_2) + N(c_3)) + (N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)) - N(c_1c_2c_3)$$
$$= 105 - (35 + 21 + 15) + (7 + 5 + 3) - 1 = 48$$



$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}) = |S| - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3)$$
$$+ N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3)$$
$$- N(c_1c_2c_3)$$