Ejercicio 12
Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$$

buscamos el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$

si $n = 2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a+b)$$

$$\begin{array}{ll} a & a \longrightarrow a^2 \\ b & b \longrightarrow b^2 \\ a & b \\ b & a \end{array}\Big\} \longrightarrow ab$$

si $n = 3$

$$(a+b+c)^3$$

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

$$\begin{array}{lll} a & a & a \longrightarrow a^3 \\ a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{array}\Bigg\} \longrightarrow a^2 b^1 c^0$$

la cantidad de formas de llegar a $a^2 b$ es igual a la cantidad de palabras de 3 letras donde a aparece 2 veces, b aparece una vez, c no aparece

$$\frac{3!}{2!\,1!\,0!} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}!\,1!\,0!} = 3$$

en general:

coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ en $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots+x_r) \cdots\cdots (x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

$$\underbrace{x_1 x_1 \cdots x_1}_{n_1 \text{ veces}} \underbrace{x_2 x_2 \cdots x_2}_{n_2 \text{ veces}} \cdots\cdots \underbrace{x_r \cdots x_r}_{n_r \text{ veces}}$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_r = n$$

el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ es la cantidad de palabras de n letras donde x_1 aparece n_1 veces, x_2 aparece n_2 veces, ..., x_r aparece n_r veces

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!} = PR^{n}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

$$(x^5+x-1)(x^5+x-1)(x^5+x-1) \cdots\cdots (x^5+x-1)$$

$x^5 \quad -1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1 \quad \rightsquigarrow (x^5)^1 x^0 (-1)^9$

$x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad -1 \quad \cdots \quad -1 \quad \rightsquigarrow (x^5)^0 x^5 (-1)^5$

(1) coeficiente de $(x^5)^1 x^0 (-1)^9$ en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$

$$\frac{10!}{1!\,0!\,9!} = 10$$

(2) coeficiente de $(x^5)^0 x^5 (-1)^5$ en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$

$$\frac{10!}{0!\,5!\,5!} = \frac{\cancel{10}\cdot 9\cdot \overset{2\cdot 4}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \overset{3\cdot 2}{\cancel{6}}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5!}} = 9\cdot 2\cdot 7\cdot 2 = 252$$

Entonces en el desarrollo de $(x^5+x-1)^{10}$ tenemos

$$10\,(x^5)^1 x^0 \overbrace{(-1)^9}^{-1} + 252\,(x^5)^0 x^5 \overbrace{(-1)^5}^{-1}$$

$$= -10x^5 - 252x^5$$

$$= \underbrace{-262}_{\text{coeficiente de } x^5} x^5$$

coeficiente de x^5 en el desarrollo de $(x^5+2x-1)^{10}$

formas de llegar a x^5 : $\begin{cases} (x^5)^1 (2x)^0 (-1)^9 \\ (x^5)^0 (2x)^5 (-1)^5 \end{cases}$

coeficiente de $(x^5)^1(2x)^0(-1)^9$: $\dfrac{10!}{1!\,0!\,9!} = 10$

coeficiente de $(x^5)^0(2x)^5(-1)^5$: $\dfrac{10!}{0!\,5!\,5!} = 252$

$$10\,(x^5)^1 (2x)^0 \overbrace{(-1)^9}^{=-1} + 252\,(x^5)^0 \underbrace{(2x)^5}_{=2^5x^5} \overbrace{(-1)^5}^{=-1}$$

$$= -10x^5 - 252\cdot 2^5 x^5$$

$$= (-10 - 252\cdot 2^5)\, x^5$$

$$= \underbrace{(-10 - 252 \cdot 2^5)}_{\hookrightarrow \text{ coeficiente de } x^5} x^5$$

Ejercicio 13
Dados $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

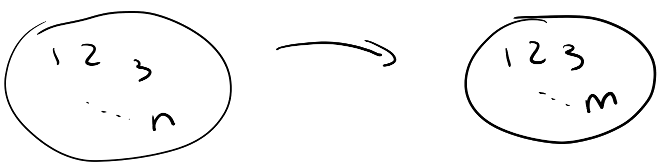
(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \ldots + r_m = n$.

a) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\}$



1ra etapa: elegimos $f(1)$
m formas

2da etapa: elegimos $f(2)$
m formas

$\vdots$

n-ésima etapa: elegimos $f(n)$
m formas

por la regla del producto la cantidad de fenciones es m^n

b) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ inyectiva

$f(x) = f(x') \iff x = x'$

si $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

$1 \longrightarrow 10$
$2 \longrightarrow 8$
$3 \longrightarrow 3$
$\vdots \qquad \vdots$

* si $n > m$ $\qquad n$

$f: \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

no hay ninguna función inyectiva

* si $n \leq m$

1^{ra} etapa: elegimos $f(1)$
m posibilidades

2^{da} etapa: elegimos $f(2)$
$m-1$ posibilidades

3^{ra} etapa: elegimos $f(3)$
$m-2$ posibilidades

$\vdots$

n-ésima etapa: elegimos $f(n)$
$m-(n-1) = m-n+1$

n-1 etapas

por la regla del producto la cantidad de funciones inyectivas es

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} = A_n^m$$

d) $f: \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,m\}$ monótona creciente estricta

$$i<j \implies f(i)<f(j)$$

$$f(1)<f(2)<f(3)<\cdots<f(n)$$

tenemos es inyectiva entonces si $m<n$, la cantidad de funciones es 0

$f:\{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$

si la imágen de f es $\{2,5,7\}$ entonces

$f(1)=2$

$f(2)=5$

$f(3)=7$

para definir una función $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ alcanza con elegir 3 elementos diferentes de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

C^7_3 funciones crecientes estrictas de $\{1,2,3\}$ en $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

en general: $f:\{1,\dots n\} \longrightarrow \{1,\dots,m\}$

$\#$ funciones crecientes estrictas $= C^m_n$

e) $f:\{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,m\}$ monótona creciente

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq \dots \leq f(n)$

$f:\{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$\to$ 1 tiene tres preimágen

2 tiene 0 preimágenes

$\to$ 3 tiene una preimágen

$f(1) = 1$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 3$

para construir una función creciente de $\{1,2,3,4\}$ tenemos que elegir 4 elementos de $\{1,2,3\}$ sin importar el orden y pudiendo repetir

$$\Rightarrow CR_4^3$$

cantidad de funciones crecientes de $\{1,2,\dots,n\}$ en $\{1,2,\dots,m\}$ es

$$CR_n^m$$

$\{1,2,\dots,m\}$

C_n^m = elegir n elementos todos distintos sin orden de un conjunto de m elementos

CR_n^m = elegir n elementos sin orden de un conjunto de m elementos pudiendo repetir

$$CR_n^m = C_n^{m+n-1}$$