PRACTICO 2

Ejercicio 6

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea? ABCDE

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

a)

5 posibles personas   4 posibles personas   3   2   1

_ _ A _ B C _ _ E _ _ D

1ra etapa: elegimos las cinco sillas donde se van a sentar las personas sin orden

C^{12}_5 formas

2da etapa: sentamos a las cinco personas en las cinco sillas

$5!$ formas

Por la regla del producto hay $C^{12}_5 \cdot 5! = \frac{12!}{\cancel{5!}\, 7!} \cdot \cancel{5!} = \frac{12!}{7!}$

otra forma

\# formas de sentar a 6 personas = # formas de elegir 5 sillas entre las 12 con orden

$= A^{12}_5$

otra forma

ABCDESSSSSSS

\# maneras de sentar a las persona = # permutaciones ABCDESSSSSSS

$= \frac{12!}{7!}$

b) silla ocupada

silla vacía

quedan 3 sillas para distribuir en 6 lugares → queremos elegir 3 lugares entre los 6 disponibles sin orden y podemos repetir

$\# \text{formas} = CR^6_3 = C^{6+3-1}_3 = C^8_3 = \frac{8!}{3!\,5!}$

x = silla vacía

| x | | | x x |

$\#$ formas de distribuir las 3 sillas que quedan $= \frac{8!}{3!\,5!}$

1ra etapa: elegir las 5 sillas donde se van a sentar las personas

$\frac{8!}{3!\,5!}$

2da etapa: sentar a las 5 personas en las cinco sillas

$5!$

por la regla del producto la cantidad de formas de sentar a las personas es $\frac{8!}{3!\,5!} \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$

Ejercicio 8

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 3$.

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4 \quad x_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, 7\}$

$\#\text{soluciones} = CR^7_4 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

b) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7<4$

<u>CASO 1</u>: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=0$

1 solución $= CR^7_0$ soluciones

<u>CASO 2</u>: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=1$

$$\boxed{CR^m_n = C^{m+n-1}_n = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!}}$$

7 soluciones

$CR^7_1 = C^{7+1-1}_1 = C^7_1 = \frac{7!}{1!\,6!} = 7$ soluciones

<u>CASO 3</u>: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=2$

CR^7_2 soluciones

<u>CASO 4</u>: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=3$

CR^7_3 soluciones

Como los casos son disjuntes, por la regla de la suma la cantidad de soluciones es $1+CR^7_1+CR^7_2+CR^7_3$

c) $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ con $\begin{cases} x_1>1 \leftrightarrow x_1\geqslant 2 \\ x_2>1 \leftrightarrow x_2\geqslant 2 \\ x_3\geqslant 3 \\ x_4\geqslant 3 \end{cases}$

la cantidad de soluciones de

$x_1+x_2+x_3+x_4=15$ con $\begin{cases} x_1\geqslant 2 \\ x_2\geqslant 2 \\ x_3\geqslant 3 \\ x_4\geqslant 3 \end{cases}$

es la misma que la cantidad de soluciones de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

entonces la cantidad de soluciones es $CR_5^4 = C_5^{4+5-1}$

$$= C_5^8$$

$$= \frac{8!}{5!\,3!}$$

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = C_3^8$$

<u>otra forma</u>:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 3 \\ x_4 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 2$$
$$x_1 - 2 \geq 2 - 2$$
$$\boxed{x_1 - 2 \geq 0}$$

$x_1 \geq 2 \quad \rightsquigarrow y_1 = x_1 - 2 \quad \Rightarrow y_1 \geq 0 \qquad x_1 = y_1 + 2$

$x_2 \geq 2 \quad \rightsquigarrow y_2 = x_2 - 2 \quad \Rightarrow y_2 \geq 0 \qquad x_2 = y_2 + 2$

$x_3 \geq 3 \quad \rightsquigarrow y_3 = x_3 - 3 \quad \Rightarrow y_3 \geq 0 \qquad x_3 = y_3 + 3$

$x_4 \geq 3 \quad \rightsquigarrow y_4 = x_4 - 3 \quad \Rightarrow y_4 \geq 0 \qquad x_4 = y_4 + 3$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$(y_1 + 2) + (y_2 + 2) + (y_3 + 3) + (y_4 + 3) = 15$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 2 + 2 + 3 + 3 = 15$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 10 = 15$$

$$\boxed{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases}$$

la cantidad de soluciones es CR_5^4