Permutaciones

tenemos un conjunto de n elementos y queremos ordenarlos

$$P_n = n!$$

Arreglos de n en k

$k \leq n$

tenemos un conjunto con n elementos y queremos elegir k elementos distintos de forma ordenada

$$\overbrace{\underbrace{1^{er}\ el.}_{\uparrow\ n} \quad \underbrace{2^{do}\ el}_{\substack{\uparrow\ n-1 \\ n-2+1}} \quad \underbrace{3^{er}\ el}_{\substack{\uparrow\ n-2 \\ n-3+1}} \quad \cdots \quad \underbrace{(k-1)\text{-ésimo}}}^{k-1\ \text{elementos}} \quad \underbrace{k\text{-ésimo elemento}}_{\uparrow\ n-(k-1) = n-k+1\ \text{posibilidades}}$$

por la regla del producto la cantidad de formas de elegir k elementos con orden

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} = A^n_k$$

arreglos de n en k

Combinaciones de n en k

$k \leq n$

tenemos un conjunto de n elementos y queremos elegir k elementos distintos sin importar el orden

→ elegimos k elementos con orden : A^n_k

→ estamos contando demás : cada elección sin orden aparece k! veces ejemplo: tenemos $\{A, B, C, D, E, F\}$ y queremos elegir 3 sin importar el orden

sin orden — con orden

$\{C, E, F\}$ ← CEF, CFE, ECF, EFC, FEC, FCE

$1 \longleftarrow 3!$

en conclusión: la cantidad de formas de elegir k elementos sin orden es:

$$\frac{A^n_k}{k!} = \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C^n_k = \binom{n}{k}}_{\text{combinaciones de } n \text{ en } k}$$

Ejercicio 4

En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}_{\text{al menos 3 entre estas}} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$

CASO 1: responde exactamente 3 entre las 5 primeras

$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}_{\text{tres de estas}} \quad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{\text{tres de estas}}$

$\binom{5}{3}$ formas — $\binom{5}{3}$ formas por la regla del producto: $\binom{5}{3}\binom{5}{3}$

<u>CASO 2</u>: responde exactamente 4 entre las 5 primeras

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{\substack{4 \text{ de estas} \\ \binom{5}{4} \text{ formas}}}\ \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{\substack{2 \text{ de estas} \\ \binom{5}{2} \text{ formas}}}$$

por la regla del producto: $\binom{5}{4}\binom{5}{2}$

<u>CASO 3</u>: responde exactamente 5 entre las 5 primeras

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{\substack{5 \text{ de estas} \\ 1 \text{ formas}}}\ \underbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}_{\substack{1 \text{ de estas} \\ \binom{5}{1} = 5 \text{ formas}}}$$

por la regla del producto: 5 formas

Como los tres casos son disjuntos, por la regla de la suma, el total es: $\binom{5}{3}\binom{5}{3} + \binom{5}{4}\binom{5}{2} + 5$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

por lo menos
3 de estas

$\binom{5}{3}\binom{7}{3}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

contesta las misma preguntas pero las estamos contando como elecciones diferentes

Ejercicio 7

¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Primero repartimos un bizcocho de cada tipo a cada estudiante

$\longrightarrow$ quedan 5 de chocolate y 4 de crema para repartir

1ra etapa: repartimos los cinco bizcochos de chocolate

x_1 = cantidad de bizcochos de chocolate que le tocan al estudiante 1

x_2 = 2

x_3 = 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad y \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$x_1 = 4$
$x_2 = 0$
$x_3 = 1$

$$\underbrace{\times\times\times\times}_{x_1} \;|\; \underbrace{\qquad}_{x_2} \;|\; \underbrace{\times}_{x_3}$$

$$\underbrace{\qquad}_{x_1} \;|\; \underbrace{\times\;\times\times}_{x_2} \;|\; \underbrace{\times\times}_{x_3}$$

$\#$ soluciones $=$ $\#$ palabras con 2 barras y 5 estrellas

$$= \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2!\,\cancel{5!}} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

2^da^ etapa: repartimos los 4 bizcochos de crema

$x_1 =$ cantidad que le toca al estudiante 1
$x_2 =$ ——————————— 2
$x_3 =$ ——————————— 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\underbrace{\times}_{x_1} \;|\; \underbrace{\times}_{x_2} \;|\; \underbrace{\times\times}_{x_3}$$

$\#$ soluciones $=$ $\#$ palabras con 2 barras y 4 estrellas

$$= \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{2!\,\cancel{4!}} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

por la regla del producto hay $21 \cdot 15$ formas de repartir los bizcochos.

Combinaciones con repetición

¿de cuántas formas podemos repartir k bizcochos idénticos entre n personas?

$\longrightarrow$ "elegir k personas entre las n pudiendo repetir y sin importar el orden"

x_1 = cantidad que le toca a la persona 1

x_2 = ——— 2

$\vdots$

x_n = ——— n

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

las soluciones las podemos representar como:

$$\star\star \mid \star \mid \text{----} \mid \star\star \qquad C_k^m = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

\# soluciones = \# palabras con k estrellas y $n-1$ barritas

$$= \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} \qquad (k+n-1)-k = n-1$$

$$= \frac{(k+n-1)!}{k!\,((k+n-1)-k)!}$$

$$= C_k^{k+n-1}$$

$$= CR_k^n$$ combinaciones con repetición de n en k