Múltiple Opción 5 Febrero 2023

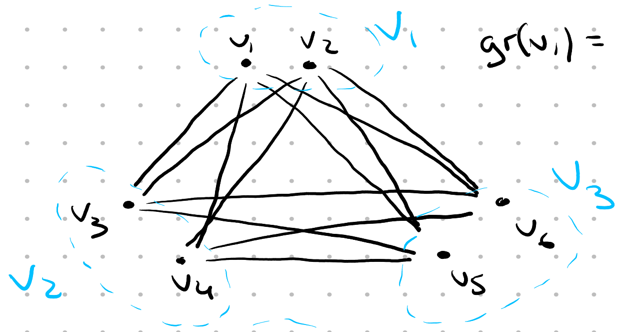
Dados tres enteros positivos r, s y t, se define el grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ como un grafo tal que el conjunto de sus vértices es igual a la unión disjunta de tres subconjuntos V_1, V_2 y V_3 con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$, y cuyas aristas son todos los pares $\{a, b\}$ tales que $a \in V_i$, $b \in V_j$ para algunos $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$.

El grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ tiene un circuito euleriano si y solo si

todos los vertices tienen grado par

(A) r, s y t son todos pares;
(B) r, s y t son todos impares;
(C) r, s y t son todos pares o si hay dos pares y un impar;
(D) r, s y t son todos pares o si hay uno par y dos impares;
(E) r, s y t son todos pares o todos impares.

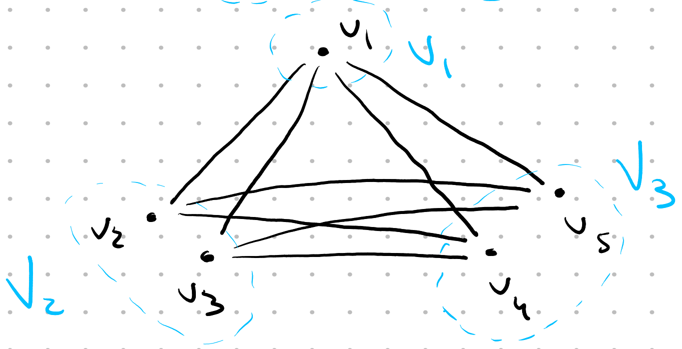
$K_{2,2,2}$

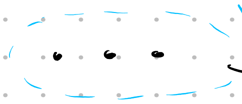


$gr(v_1) = 2 + 2 = |V_2| + |V_3|$

todos los vertices tienen grado 4

$K_{1,2,2}$



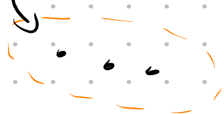


V_1 con $|V_1| = r$

→ estos vertices tienen grado $s+t$

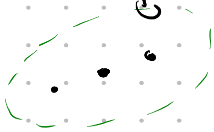
$K_{r,s,t}$

estos vertices tienen grado $r+t$



V_2 con $|V_2| = s$

estos vertices tienen grado $r+s$



V_3 con $|V_3| = t$

$K_{r,s,t}$ tiene circuito euleriano $\iff$ todos los vertices tienen grado par

$$\iff \begin{cases} s+t \text{ es par} \\ r+t \text{ es par} \\ r+s \text{ es par} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s, r \text{ y } t \text{ son pares} \\ \text{o} \\ s, r \text{ y } t \text{ son impares} \end{cases}$$

Ejercicio 3.(10 pts.) Sea (a_n) una sucesión de reales positivos que verifica $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 3n}$, $\forall n \geq 2$ con condición inicial $a_1 = \sqrt{273}$. Entonces a_{20} vale: (A) 30; (B) 35; (C) 40; (D) 45; (E) 50.

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 3n} \leftarrow \\ a_1 = \sqrt{273} \end{cases}$$

$$a_n^2 = \left(\sqrt{a_{n-1}^2 + 3n}\right)^2 = a_{n-1}^2 + 3n$$

$$b_n = a_n^2$$

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 3n \\ b_1 = 273 \end{cases}$$

1) solución de la homogénea: $b_n = b_{n-1}$

$$b_n = b_{n-1} \rightsquigarrow b_n - b_{n-1} = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda - 1$$

la única raíz es $\lambda = 1$

entonces $b_n^{(h)} = \alpha 1^n$

$$\boxed{b_n^{(h)} = \alpha}$$

2) buscamos una solución particular de $b_n - b_{n-1} = 3n = \overbrace{1^n 3n}^{r^n f(n)}$

polinomio

la solución particular va a ser de la forma:

$$b_n^{(p)} = n 1^n \underbrace{(cn + d)}_{\text{polinomio genérico de grado 1}} = n(cn + d) = cn^2 + dn$$

$$b_{n-1}^{(p)} = c(n-1)^2 + d(n-1)$$

$$b_n^{(p)} - b_{n-1}^{(p)} = 3n \Rightarrow cn^2 + dn - \left(c(n-1)^2 + d(n-1)\right) = 3n$$

$$\Rightarrow cn^2 + dn - c(n-1)^2 - d(n-1) = 3n$$

$$\Rightarrow cn^2 + dn - c(n^2 - 2n + 1) - d(n-1) = 3n$$

$$\Rightarrow \cancel{cn^2} + \cancel{dn} - \cancel{cn^2} + 2cn - c - \cancel{dn} + d = 3n$$

$$\Rightarrow 2cn + d - c = 3n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c = 3 & \Rightarrow c = \frac{3}{2} \\ d - c = 0 & \Rightarrow d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(3) sumamos la homogénea y la particular:

$$b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)}$$
$$= \alpha + \frac{3}{2}(n^2 + n)$$

$$b_1 = 273 \Rightarrow 273 = \alpha + \frac{3}{2}(1+1) = \alpha + 3$$
$$\Rightarrow \alpha = 270$$

$$\boxed{b_n = 270 + \frac{3}{2}(n^2 + n)}$$

$$b_{20} = 270 + \frac{3}{2}(20^2 + 20)$$
$$= 270 + \frac{3}{2} 420$$
$$= 270 + 3 \cdot 210$$
$$= 900$$

$$a_{20} = \sqrt{b_{20}} = \sqrt{900} = 30$$

Julio 2022

Múltiple Opción 1

¿Cuántas maneras hay de poner 10 bolitas idénticas en 6 cajas diferentes, de modo que cada caja tenga al menos una bolita y no más de 3? A) 60; B) 70; C) 80; D) 90.

x_1 = cantidad de bolitas en la caja 1

x_2 = cantidad de bolitas en la caja 2

$\vdots$

x_6 = cantidad de bolitas en la caja 6

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10 \quad \text{con} \quad 1 \leq x_i \leq 3$$

cambio de variable:

$$1 \leq x_i \leq 3 \rightsquigarrow 0 \leq \underbrace{x_i - 1}_{y_i} \leq 2$$

tomamos $y_i = x_i - 1$

$0 \leq y_i \leq 2$

$x_i = y_i + 1$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 + y_6 + 1 = 10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + 6 = 10$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 4 \\ \text{con} \quad 0 \leq y_i \leq 2 \end{array}}$$

$S = \{$soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 4$ con $0 \leq y_i\}$

$|S| = CR_4^6$

c_1: solucion con $y_1 \geq 3$

$\vdots$

c_6: solucion con $y_6 \geq 3$

$N(c_1)$: cantidad de soluciones de

$$y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 4 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 3 \\ y_2 \geq 0 \\ \vdots \\ y_6 \geq 0 \end{array}$$

$$N(c_1) = CR^6_1 = 6$$

$$N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = N(c_5) = N(c_6) = 6$$

$N(c_1 c_2)$: cantidad de soluciones

$$y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 4 \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 3 \\ y_2 \geq 3 \\ y_3 \geq 0 \\ \vdots \\ y_6 \geq 0 \end{array}$$

$$N(c_1 c_2) = 0$$

$$N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}\,\overline{c_5}\,\overline{c_6}) = \overbrace{|S| - \sum_{i=1}^{6} \overbrace{N(c_i)}^{=6}} + \sum \overbrace{N(c_i c_j)}^{=0}$$

$$= CR^6_4 - 6 \cdot 6$$

$$= C^{6+4-1}_4 - 6 \cdot 6$$

$$= C^9_4 - 36$$

$$= 126 - 36$$

$$= 90$$

Múltiple Opción 2

Hallar la función generatriz $a(x)$ de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = n(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(A) $a(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$; (B) $a(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; (C) $a(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$; (D) $a(x) = \frac{x^2}{(1-x)^3}$; (E) $a(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

$a_n = n(n-1)$ $\quad a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6, \ldots$

función generatriz de a_n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\overbrace{x^n}^{x^2 x^{n-2}}$$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(n x^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2 g''(x)$$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ es la derivada segunda de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$g(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$$

$$g''(x) = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

la función generatriz de a_n es:

$$f(x) = x^2 g''(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, CR^n_i \, x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \, C^{n+i-1}_i \, x^i$$

Múltiple Opción 2

¿Cuántos subconjuntos de tres elementos de $\{1, \ldots, 100\}$ cumplen que alguno de sus elementos es el promedio de los dos restantes? A) $\binom{100}{2}$; B) $2 \times \binom{100}{2}$; C) $\binom{50}{2}$; D) $2 \times \binom{50}{2}$.

$\{a, b, c\}$ donde alguno es el promedio de los otros dos

vamos a pensar que los elementos están ordenados:

$\{a, b, c\}$ entonces $1 \leq a < b < c \leq 100$

queremos ver cuantos de estos conjuntos verifican

$$b = \frac{a+c}{2} \longleftrightarrow 2b = a+c$$

$$\{\overset{-3}{4}, 7, \overset{+3}{10}\} \qquad \{\overset{-4}{2}, 6, \overset{+4}{10}\}$$

queremos conjuntos de la forma

$$\{b-j, b, b+j\} \qquad \frac{b-j+b+j}{2} = b$$

este caso es con b hasta 50

con $\begin{cases} 1 \leq b-j \rightarrow \text{si fijamos } b \text{ entonces } \underbrace{1 \leq j \leq b-1}_{\text{hay } b-1 \text{ posibilidades para } j} \\ b+j \leq 100 \rightarrow \text{si fijamos } b \text{ entonces } \underbrace{1 \leq j \leq 100-b}_{100-b \text{ posibilidades para } j} \end{cases}$

este caso es con $b \geq 51$

si $b = 2$ → podemos sumarle hasta 98 ✗

$\{1, 2, 3\}$ → podemos restarle máximo 1 si b vale 3:

$\{2, \overset{\frown}{3}, 4\}$ $j=1$

$\{1, 3, 5\}$ $j=2$

$\{97, 98, 99\}$ $j=1$

$\{96, 98, 100\}$ $j=2$

en <u>resumen</u>: $\{b-j, b, b+j\}$

si $1 \leq b \leq 50$ entonces hay $b-1$ posibilidades para j

si $51 \leq b \leq 99$ entonces hay $100-b$ posibilidades para j

cantidad de conjuntos:

$$\sum_{b=1}^{50} b-1 + \sum_{b=51}^{99} 100-b = 2\sum_{b=1}^{50}(b-1)$$

$$= 2\sum_{0}^{49} b$$

$$= 2\,\frac{49.50}{2} = 2\binom{50}{2}$$

$$\binom{50}{2} = \frac{50!}{2!\,48!} = \frac{50.49.\cancel{48!}}{2.\cancel{48!}} = \frac{50.49}{2}$$