**Ejercicio 1.**(10 pts.) La cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 21$ con las restricciones $-3 \leq x_i \leq 10$ para $i = 1, 2, 3$ es: (A) 28; (B) 55; (C) 253; (D) 496; (E) 91.

$x_1 + x_2 + x_3 = 21$ con $-3 \leq x_i \leq 10$

$-3 \leq x_1 \leq 10 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{x_1 + 3}_{y_1} \leq 13$ $\quad y_1 = x_1 + 3$

$0 \leq y_1 \leq 13$

$x_1 = y_1 - 3$

$-3 \leq x_2 \leq 10 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{x_2 + 3}_{y_2} \leq 13$

$0 \leq y_2 \leq 13$

$x_2 = y_2 - 3$

$-3 \leq x_3 \leq 10 \Rightarrow 0 \leq y_3 \leq 13$

$x_3 = y_3 - 3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 21 \Rightarrow (y_1 - 3) + (y_2 - 3) + (y_3 - 3) = 21$

$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 21 + 9 = 30$

$y_1 + y_2 + y_3 = 30$ con $0 \leq y_i \leq 13$

$S = \{ y_1 + y_2 + y_3 = 30$ con $0 \leq y_i \}$

$c_1$: Soluciones con $y_1 \geq 14$

$c_2$: soluciones con $y_2 \geq 14$

$c_3$: soluciones con $y_3 \geq 14$

$* \, |S| = CR^3_{30} = C^{30+3-1}_{30}$

$* \, N(c_1) = ?$

la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=30 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 14 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

es la misma que la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=16 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

en $N(c_1) = CR^3_{16}$

* $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = CR^3_{16}$

* $N(c_1,c_2) = ?$

la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=30 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 14 \\ y_2 \geq 14 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

es la misma que la cantidad de soluciones de

$$y_1+y_2+y_3=2 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

* $N(c_1,c_2) = N(c_1,c_3) = N(c_2,c_3) = CR^3_2$
* $N(c_1,c_2,c_3) = 0$

Entonces

$$N(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3) = |S| - N(c_1) - N(c_2) - N(c_3) + N(c_1c_2) + N(c_2c_3) + N(c_1c_3) - N(c_1c_2c_3)$$

$$= CR^3_{30} - 3CR^3_{16} + 3CR^3_2 = 55$$

**Ejercicio 2.**(10 pts.) Para $n$ natural sea $a_n$ la cantidad de formas de pagar $n$ pesos con monedas de \$ 1 y \$ 2, donde $a_0 = 1$. Consideramos la función generatriz $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, entonces $f(x)$ es:

$a_n$ = cantidad de maneras de pagar n pesos con monedas de 1 y de 2

| monedas de 1 peso | monedas de 2 pesos |
|---|---|
| 0, 1, 2, 3, 4, .... | 0, 2, 4, 6, 8, ..... |

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ $\qquad$ $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$

formas de obtener 4 pesos:

* 0 en monedas de 1 y 4 en monedas de 2 (2 monedas de 2)
* 2 en monedas de 1 y 2 en monedas de 2 (1 moneda de 2)
* 4 en monedas de 1 y 0 en monedas de 2

$a_n$ es el coeficiente de $x^n$ en $\quad f(x) = \sum a_n x^n$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots)$$

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \dots \qquad 1 = A(1+x) + B(1-x)(1+x) + C(1-x)^2$$
$$y = x^2 \quad = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$
$$= \frac{1}{1-y}$$
$$= \frac{1}{1-x^2}$$

**Ejercicio 2.**(10 pts.) Para $n$ natural sea $a_n$ la cantidad de formas de pagar $n$ pesos con monedas de \$ 1 y \$ 2, donde $a_0 = 1$. Consideramos la función generatriz $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, entonces $f(x)$ es:

**Respuesta:** $\frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/4}{1+x}$.

## Segundo ejercicio de desarrollo

Sea $A$ un conjunto con 9 elementos. Se considera una relación de orden $R$ en $A$ tal que:

$b \leq a$

(*i*) $R$ tiene al menos una cadena[1] con 5 elementos, y

(*ii*) las anticadenas[2] de $R$ tienen a lo sumo 3 elementos.

Se escribe $m$ al número de elementos maximales de $R$.

(1) Hallar todos los posibles valores del entero $m$ para las relaciones de orden $R$ en $A$ que cumplen las condiciones (*i*) y (*ii*).

(2) Para cada valor posible de $m$ determinado en (1), dibujar el diagrama de Hasse de una relación de orden $R$ en $A$ que cumple las condiciones (*i*) y (*ii*), y que tiene exactamente $m$ elementos maximales.

(3) Sea $r = |R|$ la cantidad de elementos de la relación $R \subseteq A \times A$ y $h$ la cantidad de aristas del diagrama de Hasse correspondiente. Probar que $r \geq h + 15$.

1. m = número de elementos maximales

posibles valores para m

los elementos maximales forman una anticadena

⇒ no puede haber más de tres maximales

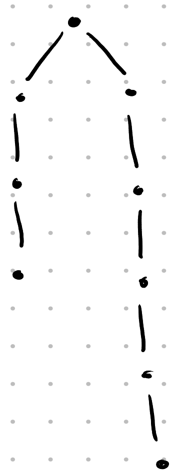
como A es un conjunto finito, tiene que haber por lo menos un maximal

⇒ los valores posibles para m son 1, 2 y 3

2. m = 3

m = 2

m = 1



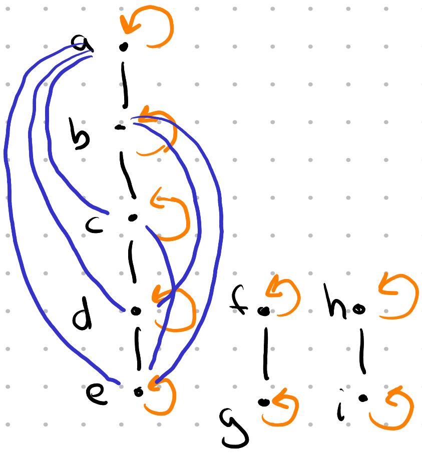
$R \subset A \times A$

3. $r = |R|$ = cantidad de elementos en la relación

h = cantidad de aristas del diagrama de Hasse

$r \geq h + 15$

R relación de orden $\begin{cases} \text{reflexiva} \\ \text{antisimétrica} \\ \text{transitiva} \end{cases}$



$R: \quad a \leq a \quad b \leq b \quad \vdots \qquad \left.\begin{array}{l} b \leq a \\ c \leq b \end{array}\right] \Rightarrow c \leq a$

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Reflexiva

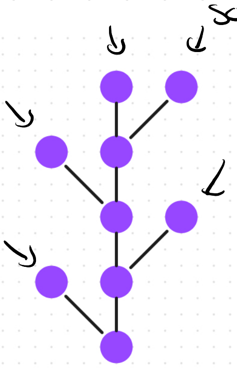
$R = \{\underbrace{\overbrace{(a,a), (b,b), (c,c), \ldots\ldots (i,i)}}_{}, \underbrace{(c,a), (c,d), (c,e), (b,d), (b,e), (c,e)}_{}$

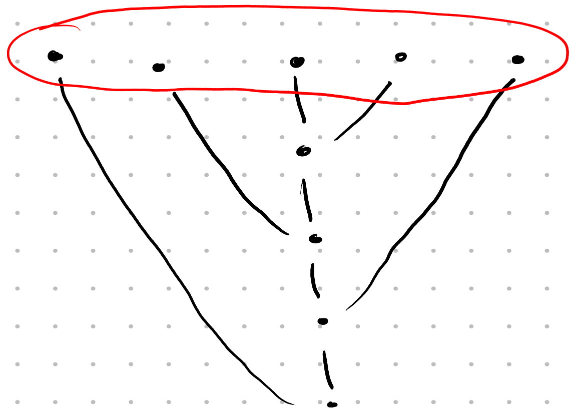
9 elementos en R que no aparecen como aristas en el diagrama

6 elementos que están en R pero que no aparecen como aristas

$R = \{(b,a), (c,b), (d,c), (e,d), (g,f), (i,h),$

$r \geq h + 1 \; 5$



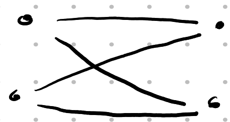




**Múltiple Opción 5**

Sea $G$ un grafo simple cualquiera, $\overline{G}$ su complemento. Entonces:
A) Si $G$ no es plano, $\overline{G}$ sí lo es; B) Si $G$ no es euleriano, $\overline{G}$ sí lo es;
C) Si $G$ no es hamiltoniano, $\overline{G}$ sí lo es; D) Si $G$ no es conexo, $\overline{G}$ sí lo es.
E) Ninguna de las anteriores es correcta.

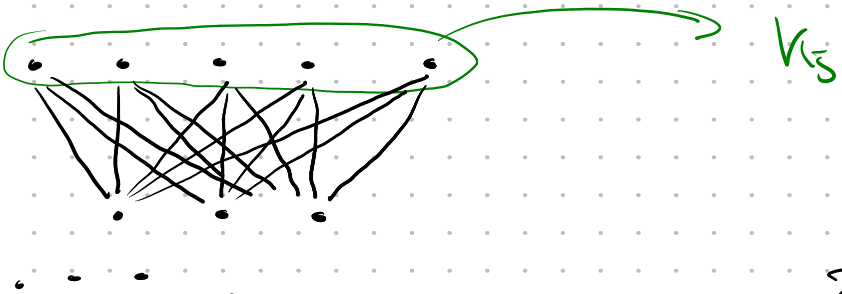
es cierta

G



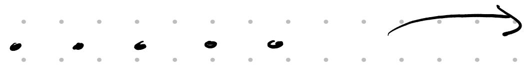
$\overline{G}$

Contraejemplo para A:




$G$ $\bar{G}$

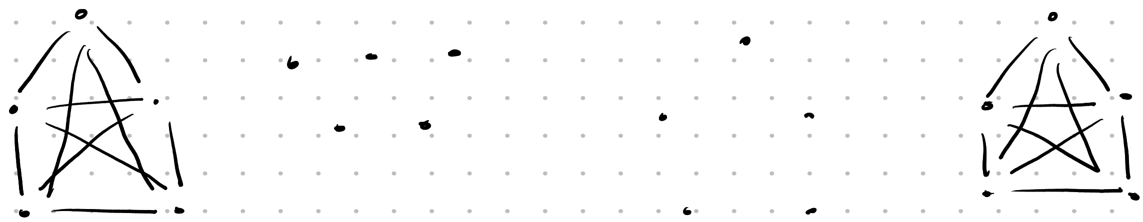
subgrafo que es $K_{3,3}$



plano

$K_5$

no es plano



$G$

no es plano

$\bar{G}$

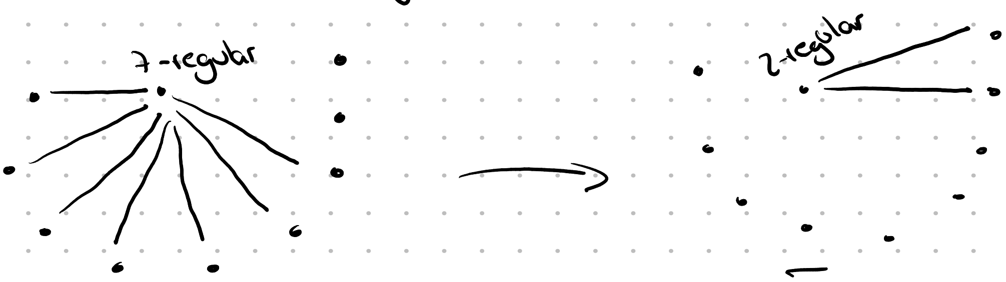
no es plano

**Múltiple Opción 3**

Hallar la cantidad de grafos simples 7-regulares con 10 vértices, a menos de isomorfismo.
(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

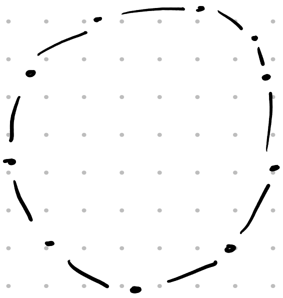
$G$ y $G'$ son isomorfos $\Leftrightarrow$ $\bar{G}$ y $\bar{G'}$ son isomorfos

si $G$ es 7-regular entonces $\bar{G}$ es 2-regular




$G$ $\bar{G}$

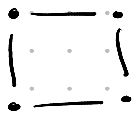
buscamos la cantidad de grafos 2-regulares con 10 vertices



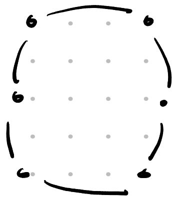
$C_{10}$ ← el unico 2-regular con 10 vertices y conexo

2-regulares, 10 vertices y 2 componentes conexas

caso 1:

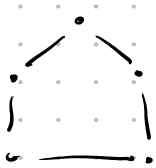


$C_4$



$C_6$

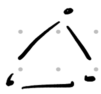
caso 2:



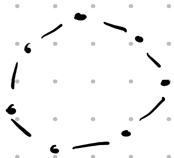
$C_5$

$C_5$

caso 3:



$C_3$



$C_7$

cantidad de casos

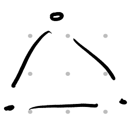
cantidad de soluciones "distintas" de

$x_1 + x_2 = 10$ con $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 3$

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 5 ← | 1 |
| 3 | 7 | 1 |
| 7 | 3 | |
| 6 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | |

2-regulares, 10 vertices y 3 componentes conexas

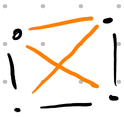
$C_3$



$C_3$

$C_4$

total de grafos no isomorfos 2-regulares con 10 vertices = 5



## Múltiple Opción 4

Sea $a_n$ la cantidad de secuencias de largo $n$ formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar $a_{21}$.

*Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea de segundo orden para $a_n$.*

(A) $3 \times 2^{10}$; (B) $2 \times 3^{10}$; (C) $3^{11}$; (D) $5 \times 2^{10}$; (E) $4 \times 3^{10}$.

$a_n$ = secuencias de largo n formadas por 0, 1, 2, 3 y 4

tales que: * dos consecutivas difieren en 1 o en -1

* la última entrada es 1 o 3

$a_1 = 2$

1

3

$a_2 = 4$

01

21

23

43

$a_3 =$

101 343

321 323

121 123

1 o 3 — 1 o 3

$\downarrow$ $\downarrow$

_ _ 1   _ _ 3

largo 1 largo 1

101 343

121 323

123 321

$a_3 = 3a_1$

$\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,1,0\,1$ $\qquad$ $\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,3,4\,3$

$\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,1,2\,1$ $\qquad$ $\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,3,2\,3$

$\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,1,2\,3$ $\qquad$ $\underbrace{\text{secuencia de largo } n}\,3,2\,1$

$$a_{n+2} = 3a_n$$

$$\underset{\underset{2}{\parallel}}{a_1} \xrightarrow{\times 3} \underset{\underset{6}{\parallel}}{a_3} \xrightarrow{\times 3} a_5 \xrightarrow{\times 3} a_7 \rightarrow a_9 \rightarrow a_{11} \rightarrow a_{13} \rightarrow a_{15} \rightarrow a_{17} \rightarrow a_{19} \rightarrow a_{21}$$

$$a_{21} = 3^{10} \cdot 2$$

### Ejercicio de Desarrollo 1

Se considera la relación binaria $R$ de *divisibilidad* sobre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, definida por:

$$a\,R\,b \quad \text{sii} \quad \exists n \in \mathbb{N},\ an = b\,.$$

(Es decir: $a\,R\,b$ si y solo si $b$ es múltiplo de $a$)

(1) Demostrar que $R$ es una relación de orden sobre $\mathbb{N}$

(2) ¿El orden $R$ tiene mínimo? ¿máximo? Justificar las respuestas.

(3) ¿El orden $R$ es un retículo? Justificar la respuesta.

$a, b \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$aRb \iff$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an = b$

<u>Antisimétrica</u>: $aRb$ y $bRa \Rightarrow a = b$

$aRb \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $an = b$

$bRa \Rightarrow$ existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $bn' = a$

entonces $\left.\begin{array}{l} b = an \\ bn' = a \end{array}\right\} \Rightarrow a\underbrace{nn'} = a$

$\Rightarrow nn' = 1$

$\Rightarrow n = n' = 1$

$\Rightarrow a = b$