Múltiple Opción 5

Sea G un grafo simple con seis componentes conexas, seis vértices colgantes y sus restantes vértices de grado dos. Sea c la cantidad de ciclos de G.

Opciones: A) $c = 2$; B) $c = 3$; C) $c = 4$; D) La información no permite determinar c.

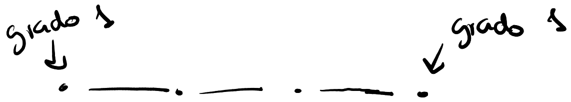
G grafo simple

→ 6 componentes conexas

→ 6 vertices de grado 1 ←

→ los demás vertices son de grado 2

cantidad de ciclos?



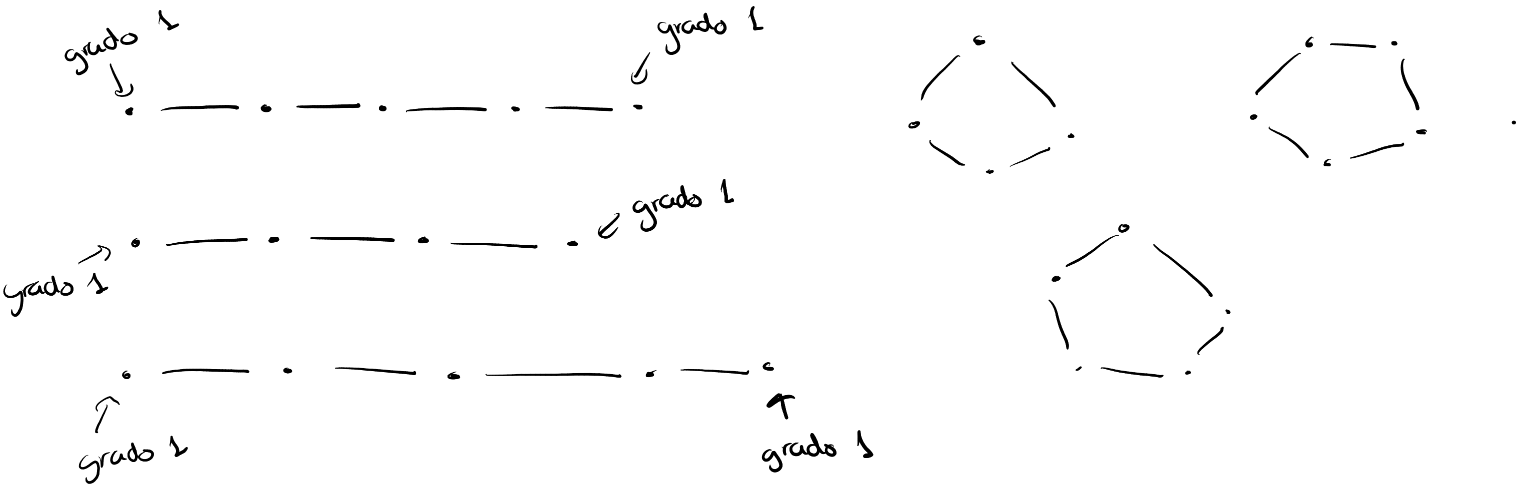
G tiene 6 componentes → 3 son caminos P_n

→ 3 son ciclos

6 componentes

$\underbrace{\text{6 vertices de grado 1}}$ y el resto de grado 2

las componentes conexas son P_n o C_n



entonces el grafo tiene 3 ciclos

EJERCICIO 6 *(20 puntos)* Sean $X = \{\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, \underline{5}\}$ e $Y = \{3, 4\}$. Defina una relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de partes de X dada por: $A\mathcal{R}B$ si $A \cup Y = B \cup Y$.

$A \subset X$, $B \subset X$

$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$

$A \cup Y = \{1,2,3,4\}$, $B \cup Y = \{2,3,4\}$ $\Big\}$ $A \not\mathcal{R} B$

1. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
2. ¿Cuál es la clase de equivalencia del conjunto $\{1, 2\}$?
3. ¿Cuántas clases de equivalencia hay?

$A = \{1,2\}$ $B = \{1,2,3\}$

$A \cup Y = \{1,2,3,4\}$, $B \cup Y = \{1,2,3,4\}$ $\Big\}$ $A\mathcal{R}B$

1. * $\mathcal{R}$ es reflexiva: $A \subset X$, queremos ver $A\mathcal{R}A$

$A \cup Y = A \cup Y \Rightarrow A\mathcal{R}A$

* $\mathcal{R}$ es simétrica: $A \subset X$, $B \subset X$, queremos ver que $A\mathcal{R}B \Rightarrow B\mathcal{R}A$

$A\mathcal{R}B \Rightarrow A \cup Y = B \cup Y \Rightarrow B \cup Y = A \cup Y \Rightarrow B\mathcal{R}A$

* $\mathcal{R}$ es transitiva: $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset X$

queremos ver que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C \Rightarrow A\mathcal{R}C$

$A\mathcal{R}B \Rightarrow A \cup Y = B \cup Y$, $B\mathcal{R}C \Rightarrow B \cup Y = C \cup Y$ $\Big\} \Rightarrow A \cup Y = C \cup Y \Rightarrow A\mathcal{R}C$ ✓

2. clase de equivalencia de $\{1,2\}$

$[\{1,2\}] = \{B \subset X : \{1,2\}\mathcal{R}B\} = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

$\{1,2\}\mathcal{R}B \iff \underbrace{\{1,2\} \cup \{3,4\}}_{\{1,2,3,4\}} = B \cup \{3,4\}$

$B = \{1,2\}$ $B = \{1,2,4\}$

$B = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4\}$

si $B = \{1\}$, $B \cup \{3,4\} = \{1,3,4\}$

3. cantidad de clases de equivalencia

$[\{2,4,5\}] = \{\{2,5\}, \{2,3,5\}, \{2,3,4,5\}, \{2,4,5\}\} = [\{2,5\}]$

$\underbrace{\{2,4,5\} \cup \{3,4\}}_{\{2,3,4,5\}} = B \cup \{3,4\}$

la cantidad de clases de equivalencia es la cantidad de subconjuntos de $\{1,2,5\}$

$\underset{2\ pos.}{\uparrow}$ $\underset{2\ pos.}{\uparrow}$ $\underset{2\ pos.}{\uparrow}$

2^3 subconjuntos $\rightarrow$ 8 clases de equivalencia

$[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

$[\{1\}] = \{\{1\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3,4\}\}$

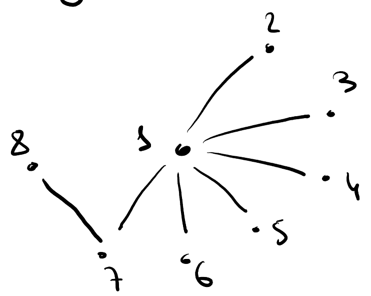
$[\phi] = \{\phi, \{3\}, \{4\}, \{3,4\}\}$

Múltiple Opción 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple 6–regular con 8 vértices (un ejemplo de tal grafo es el Hiperoctahedro). Entonces:

A) G no es plano y contiene un subgrafo isomorfo a K_5;
B) G no es plano y contiene un subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$;
C) G es plano y tiene un ciclo hamiltoniano;
D) G es plano y no tiene un ciclo hamiltoniano.

6 - regular = todos los vertices tienen grado 6



es conexo

vamos a calcular la cantidad de aristas:

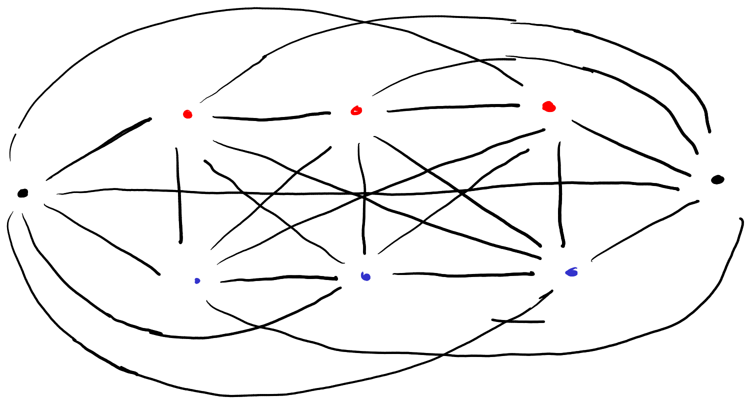
$$\left.\begin{array}{l} \sum_{v \in V} gr(v) = 2e \\ \sum_{v \in V} \underbrace{gr(v)}_{6} = 8 \cdot 6 = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow 48 = 2e \Rightarrow \boxed{e = 24}$$

si G es plano $\Rightarrow$ $e \leq 3v - 6$

$24 \leq 3 \cdot 8 - 6$

$24 \leq 18$ absurdo

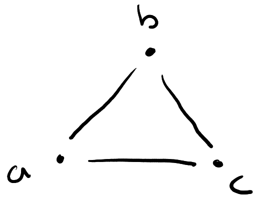
$\Rightarrow G$ no es plano



G tiene subgrafo isomorfo a $K_{3,3}$

Múltiple Opción 6

Sean a y b dos vértices de C_3. Hallar la cantidad de caminos de largo 11 que empiezan en a y terminan en b. Opciones: A) 680; B) 681; C) 682; D) 683;



C_3

$a \_ \_ \_ \ldots \_ b$

b o c 2 pos

recurrencia

para construir un camino de largo 11 que empieza en a y termina en b:

1) 6 en sentido horario y 5 en sentido antihorario:

a → HHHHHHAAAAA → b

$\# \text{caminos} = \dfrac{11!}{6!5!}$

2) 11 en sentido antihorario

1 camino

3) 2 antihorario y 9 horario

$\dfrac{11!}{9!2!}$

4) 3 horario y 8 antihorario

$\dfrac{11!}{3!8!}$

$a \underbrace{\_ \_ \_ \ldots \_}_{} b$

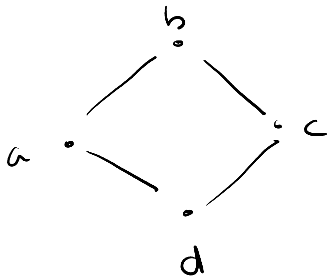
camino de largo 10 que termine en a o en c

b_n = camino de largo n que termina en b y empieza en a

a_n = camino de largo n que termina en a y empieza en a

c_n = camino de largo n que termina en c y empieza en a

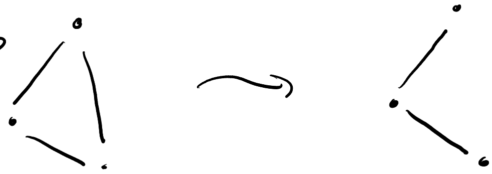
$b_{11} = \underbrace{a_{10}}_{b_9 + c_9} + c_{10}$



Múltiple Opción 6

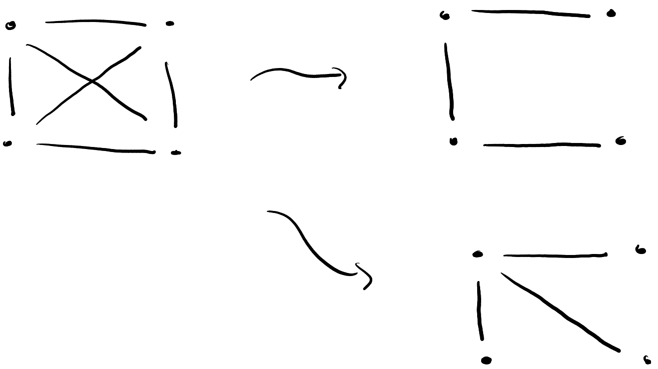
Llamemos respectivamente a_n, b_n y c_n a la cantidad de caminos de largo n que empiezan en a terminan en a, b o c. Se desea hallar b_{11}. Por regla de la suma: $a_n + b_n + c_n = 2^n$. Además, $b_{n+1} = a_n + c_n$. Sustituyendo tenemos que $b_{n+1} + b_n = 2^n$, que al resolver con el dato inicial $b_1 = 1$ se obtiene $b_n = ((-1)^{n+1} + 2^n)/3$. Luego $b_{11} = (1 + 2^{11})/3 = 2049/3 = 683$, y la opción correcta es la D.

K_3



arból recubridor de K_3

cantidad de arboles recubridores de K_n: n^{n-2}

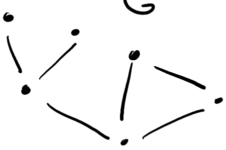


Ejercicio 12 Demostrar que en una reunión de 6 personas cualesquiera siempre existen al menos 3 personas que se conocen entre sí o al menos 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).

$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

$P_i R P_j$ si P_i y P_j se conocen

G



3 personas se conocen entre sí $\Rightarrow$ hay un 3-ciclo en el grafo

$G \longrightarrow \overline{G}$

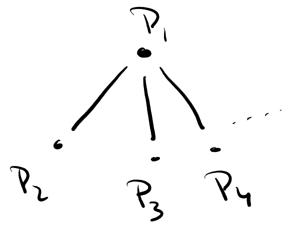
3 personas no se conocen $\Rightarrow$ hay un 3-ciclo en el complemento

Hay que probar que hay un 3-ciclo en G o hay un 3-ciclo en $\overline{G}$.

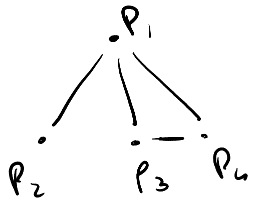
G $\longrightarrow$ $\overline{G}$

faltan aristas

tomemos un vertice de G que tiene grado ≥ 3

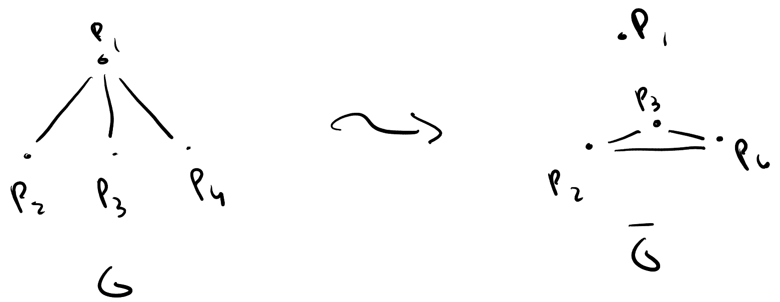


$\rightarrow$ si dos de P_2, P_3 y P_4 son adyacentes $\Rightarrow$ hay un 3-ciclo en G



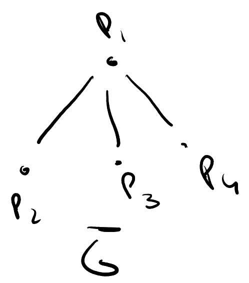
P_1, P_3, P_4 se conocen

$\rightarrow$ no hay adyacencias entre P_2, P_3, P_4

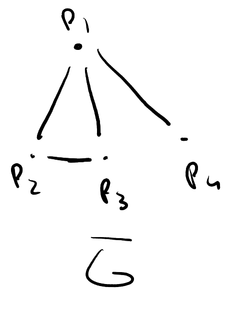


P_3, P_2, P_4 no se conocen

si G no tiene un vertice con grado ≥ 3 entonces en $\overline{G}$ si hay un vertice de grado ≥ 3

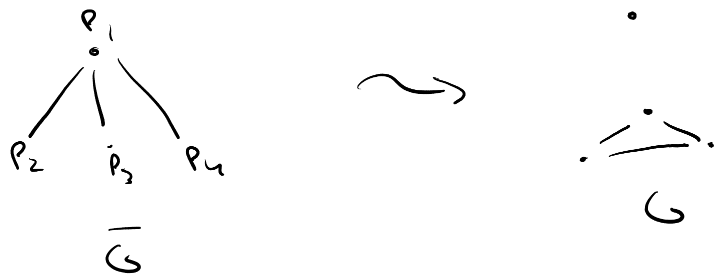


$\rightarrow$ si dos entre P_2, P_3 y P_4 son adyacentes



3 personas que no se conocen

→ si no hay adyacencias entre P_2, P_3 y P_4



3 personas que se conocen