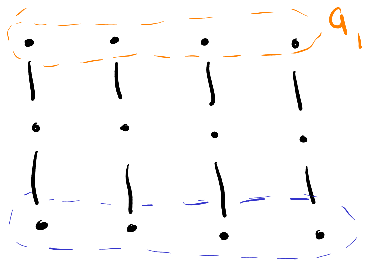
Ejercicio 4.(10 pts.) Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Sea N la cantidad de relaciones de órdenes parciales $\mathcal{R}$ sobre A cuyo diagrama de Hasse consiste en una unión de 4 cadenas disjuntas de tamaño 3 y que verifican simultáneamente las siguientes tres condiciones: i) $1, 2, 3$ y 4 son elementos minimales; ii) $9, 10, 11, 12$ son elementos maximales; iii) 1 no es menor que 12. Entonces N es igual a:
(A) 432; (B) 576; (C) 2592; (D) 3456; (E) 10368.

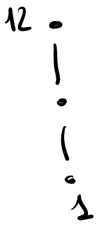
→ el diagrama de Hasse es unión de 4 cadenas disjuntas de tamaño 3



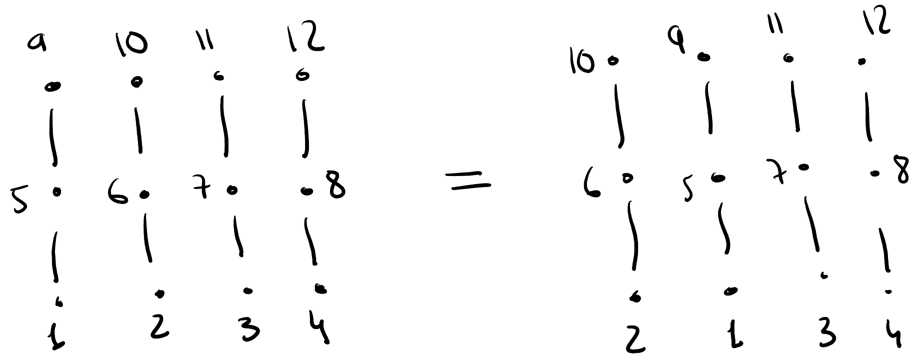
9, 10, 11, 12 están en este nivel

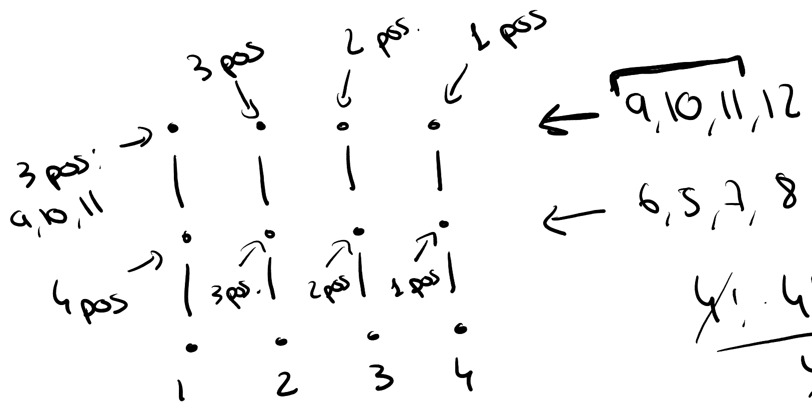
1, 2, 3 y 4 están en este nivel

→ 1 no es menor que 12



esta cadena no puede aparecer en el diagrama de Hasse





$$\frac{4! \cdot 4! \cdot 3 \cdot 3!}{4!}$$

formas de completar el segundo nivel: $4!$

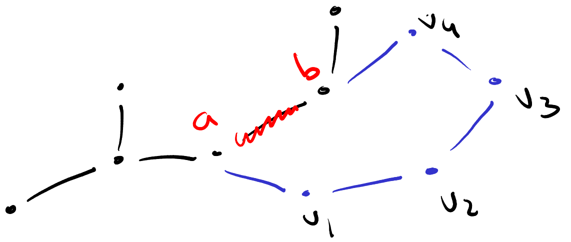
formas de completar el tercer nivel: $3 \cdot 3!$

total de relaciones: $4! \cdot 3 \cdot 3! = 432$

Ejercicio de Desarrollo 1: Sea T un árbol no trivial (con al menos una arista).

a) Probar que si a T le quito una arista, el grafo obtenido no es conexo.

b) Probar que si a T le agrego una arista, el grafo obtenido tiene un ciclo.



$|E| = |V| - 1$

$|E| \geq |V| - 1$ conexo

$|E| \leq |V| - 1$ acíclico

a) T un arbol, a y b dos vertices adyacentes

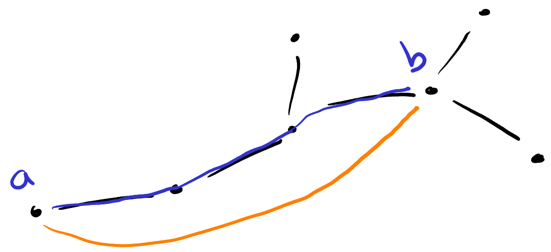
queremos ver que si le quitamos la arista ab al grafo T, entonces el grafo que obtenemos no es conexo

* veamos que el unico camino simple que conecta a y b es la arista ab

Supongamos por absurdo que existe otro camino simple $a v_1 v_2 \cdots v_n b$ entonces si concatenamos $a v_1 v_2 \cdots v_n b$ con la arista ba obtenemos un ciclo lo que es absurdo porque T es acíclico.

* entonces si al grafo T le quitamos la arista ab entonces ya no hay un camino de a en b y por lo tanto el grafo obtenido no es conexo.

b)



Sea T un arbol y a, b dos vertices no adyacentes

queremos ver que si le agregamos la arista ab al grafo T, obtenemos un grafo que tiene un ciclo

T es conexo entonces existe un camino simple $a v_1 v_2 \cdots v_n b$ de a en b

Si concatenamos $a v_1 v_2 \cdots v_n b$ con la arista ba obtenemos un ciclo.

Múltiple Opción 6

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y R el orden de divisibilidad (aRb si y solo si b es múltiplo de a). Indicar el diagrama de Hasse asociado a la relación R.

A) B) C) D)

$aRb \iff b$ es multiplo de a

$1Rb \iff b$ es multiplo de 1

$1R1,\ 1R2,\ 1R3,\ 1R4,\ 1R6,\ 1R12$

$2Rb \iff b$ es multiplo de 2

$2R2,\ 2R4,\ 2R6,\ 2R12$

$3Rb \iff b$ es multiplo de 3

$3R3,\ 3R6,\ 3R12$

$4Rb \iff b$ es multiplo de 4

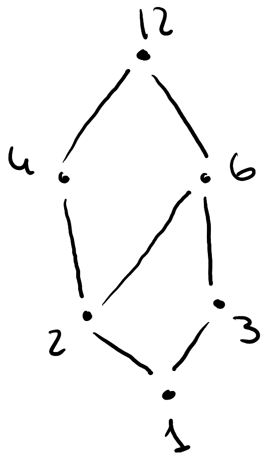
$4R4,\ 4R12$

$6Rb \iff b$ es multiplo de 6

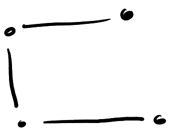
$6R6,\ 6R12$

$12Rb \iff b$ es multiplo de 12

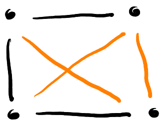
$12R12$



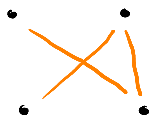
Grafo autocomplementario

 $\simeq$ 

G



K_4

 $\simeq$ 

$\bar{G}$

$G \simeq \bar{G}$

Múltiple Opción 2

Sea R el orden parcial sobre $A = \{a, b, c, d, e\}$ dado por el diagrama de Hasse de la Figura 1. Entonces, un orden lineal $\leq$ sobre A que incluye al orden R es:

A) $e \leq a \leq b \leq c \leq d$; B) $e \leq d \leq c \leq b \leq a$; C) $e \leq d \leq c \leq a \leq b$; D) $e \leq c \leq a \leq d \leq b$.

$b \leq d$ $\qquad$ $b \leq a$ $\qquad$ $c \leq d$ X

orden lineal = orden total

$a \leq b \leq c \leq d \leq e$ es un orden total en A

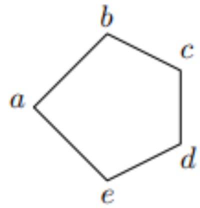
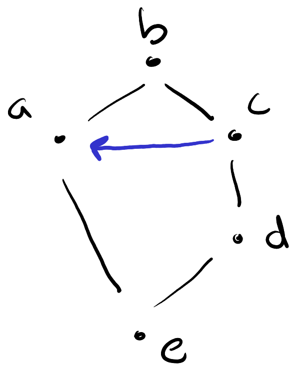


FIGURA 1. Diagrama de Hasse.



y agregamos $c \leq a$ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} d \leq c \\ c \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow d \leq a$

Ejercicio de desarrollo 1 (15 puntos)

Se considera en $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la siguiente relación:

$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff$ a divide a c y b $\leq$ d

$(a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff \begin{cases} c = na & n \in \mathbb{N} \\ b \leq d \end{cases}$

1. Demostrar que $\mathcal{R}$ es una relación de orden parcial.
2. Si $A = \{(2, 3), (2, 7), (4, 1), (4, 9), (8, 5), (8, 6)\}$. Dibujar el diagrama de Hasse y determinar (en caso de existir) elementos maximales, elementos minimales, elemento máximo y elemento mínimo.
3. Agregar a lo sumo 3 elementos a la relación para que $\mathcal{R}$ sea retículo.

1. reflexiva + antisimétrica + transitiva

veamos que $\mathcal{R}$ es antisimétrica

sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ y $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$

queremos ver que $(a,b) = (c,d)$ es decir que $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

$$(a,b)\, R\, (c,d) \iff \begin{cases} \boxed{c = na \quad n \in \mathbb{N}} \\ \boxed{b \leq d} \end{cases}$$

$$(c,d)\, R\, (a,b) \iff \begin{cases} \boxed{a = n'c \quad n' \in \mathbb{N}} \\ \boxed{d \leq b} \end{cases}$$

* tenemos

$$\left.\begin{matrix} b \leq d \\ d \leq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{b = d}$$

* $c = na$ con $\underline{n, n' \in \mathbb{N}}$
$a = n'c$

$\Rightarrow a = n'c = \underbrace{n'n}\, a$

$\Rightarrow n'n = 1$

$\Rightarrow n' = n = 1$ porque $n, n' \in \mathbb{N}$

entonces $\underline{c = a}$

2. $A = \{(2,3), (2,7), (4,1), (4,9), (8,5), (8,6)\}$

$(2,3)\, R\, (a,b) \iff \begin{cases} a \text{ multiplo de } 2 \\ b \geq 3 \end{cases}$

$(2,3)\, R\, (2,3)$

$(2,3)\, R\, (2,7)$ $\qquad (2,3) \not R\, (4,1)$

$(2,3)\, R\, (4,9)$

$(2,3)\, R\, (8,5)$

$(2,3)\, R\, (8,6)$

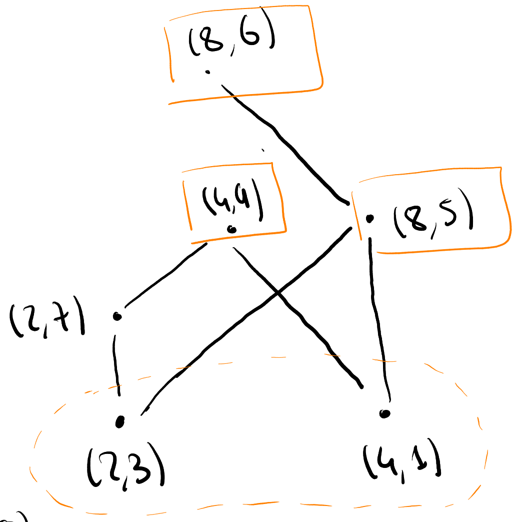
$(2,7)\, R\, (4,9)$ $\qquad (2,7)\, R\, (2,7)$

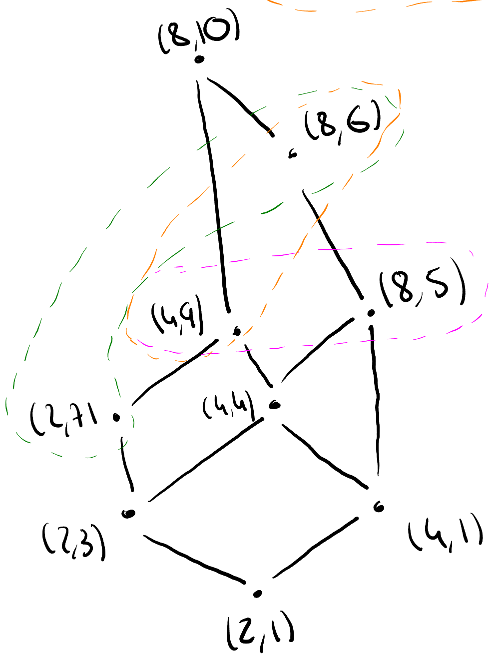
$(4,1)\, R\, (4,9)$ $\qquad (4,1)\, R\, (8,5)$ $\qquad (4,1)\, R\, (8,6)$ $\qquad (4,1)\, R\, (4,1)$

$(4,9)\, R\, (4,9)$

$(8,5)\, R\, (8,6)$ $\qquad (8,5)\, R\, (8,5)$

$(8,6)\, R\, (8,6)$





Múltiple Opción 2

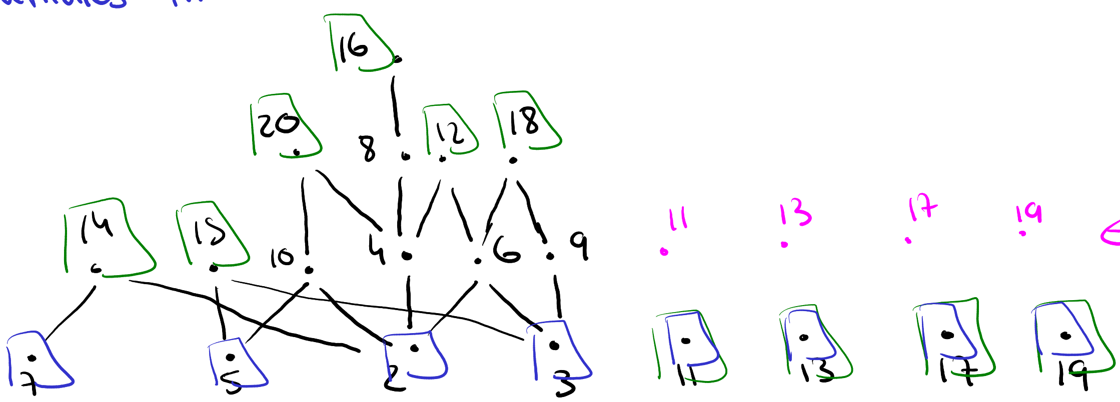
Sea $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 2 \leq x \leq 20\}$ y R orden parcial tal que aRb si a divide a b.
Sea m la cantidad de elementos minimales, M la de elementos maximales y α el tamaño máximo de una anticadena. Opciones: ~~A)~~ R es retículo; ~~B)~~ $m = 7$; ~~C)~~ $M = 11$; D) $\alpha = 10$.

$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$aRb \iff a$ divide a b

maximales $M = 10$

minimales $m = 8$



← anticadena con 10

G grafo cualquiera: $\sum_{v \in V} gr(v) = 2e$

G grafo plano simple conexo:

* $v - e + r = 2$ (Euler)
* $\sum gr(R) = 2e$
* $e \leq 3v - 6$ con $v \geq 3$

$G = (V,E)$ árbol: $|E| = |V| - 1$

G conexo: $|E| \geq |V| - 1$

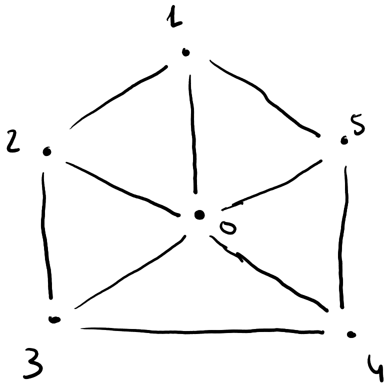
G acíclico: $|E| \leq |V| - 1$

fórmula de Euler para G plano, simple con k componentes conexas

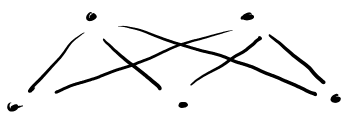
$$v - e + r = k + 1$$

Para n >2 se define el grafo Wn =(Vn,En) (el grafo rueda con n rayos) como el grafo cuyo conjunto de vértices es Vn={0,1,2,...,n}. Las aristas son de la forma {i,i+1} para i=1,2,..,n-1; {n,1} y {0,i} para i=1,2,..,n.
(Obs: los vértices del 1 al n forman un ciclo y el 0 está conectado con todos los vértices del ciclo)

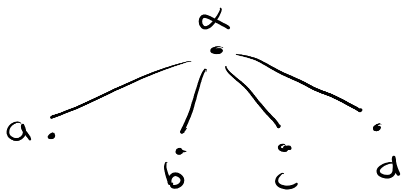
El grafo rueda W5 tiene ______ subgrafos homeomorfos a $K_{1,4}$.

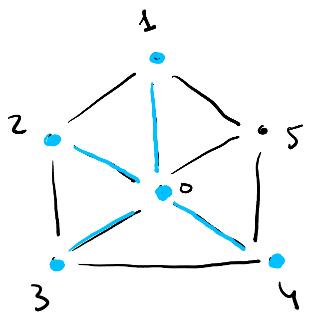


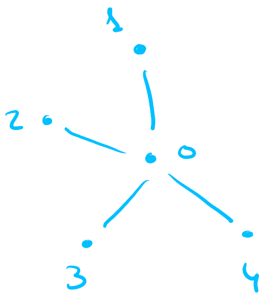
subgrafos homeomorfos a $K_{1,4}$



$K_{2,3}$

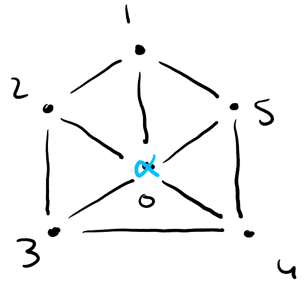






es subgrafo isomorfo a $K_{1,4}$

Cantidad de subgrafos isomorfos a $K_{1,4}$

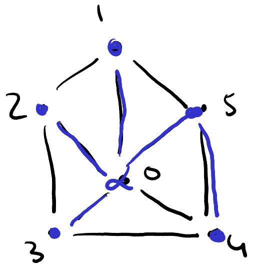


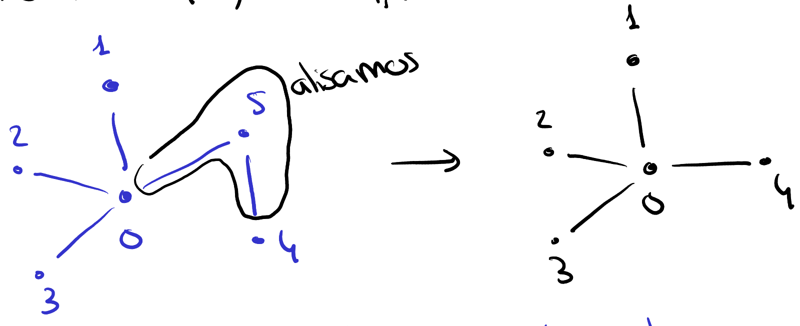
el vertice 0 tiene que jugar el rol de α

para construir un $K_{1,4}$ hay que elegir 4 vertices del ciclo de afuera

$\binom{5}{4} = 5$ subgrafos isomorfos a $K_{1,4}$

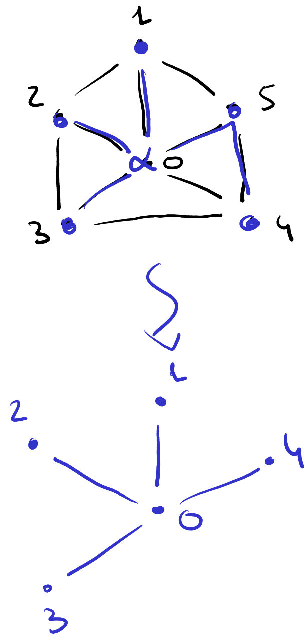
Subgrafos homeomorfos (pero no isomorfos) a $K_{1,4}$

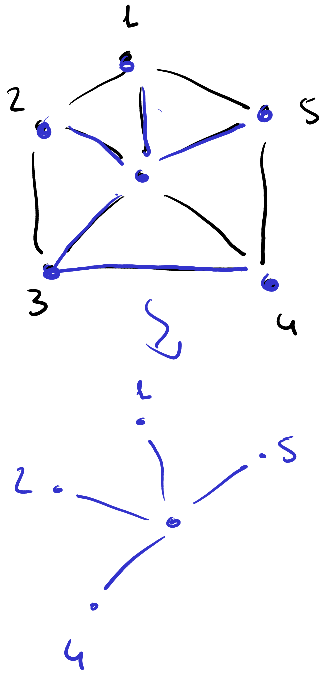


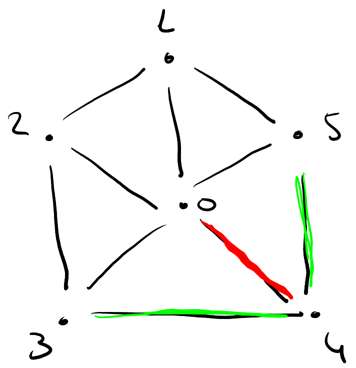


subgrafo de W_5 homeomorfo a $K_{1,4}$

el vertice 0 va a ser α







① elegimos una arista que sale de 0 que no va a estar el subgrafo

5 posibilidades

② elegimos una de las otras dos aristas adyacentes a 4 que si va a estar en el subgrafo

2 posibilidades

total de subgrafos de W_5 homeomorfos a $K_{1,3}$

$$5 + 5 \cdot 2 = 15$$

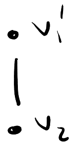
isomorfos — homeomorfos y no isomorfos

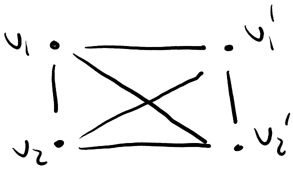
Múltiple Opción 5

Sean $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ dos grafos simples, sin vértices en común. Se define un nuevo grafo $K = (V'', E'')$, donde $V'' = V \cup V'$ y $E'' = E \cup E' \cup \{\{v, v'\} : v \in V, v' \in V'\}$.

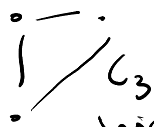
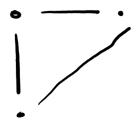
Indicar la opción correcta.

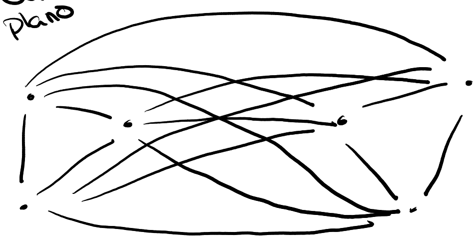
~~(A)~~ Si G y H son eulerianos entonces K es euleriano;
~~(B)~~ Si G y H son planos entonces K es plano;
(C) Si G y H son hamiltonianos entonces K es hamiltoniano;
~~(D)~~ Si G y H son bipartitos entonces K es bipartito;
~~(E)~~ Si G y H son árboles entonces K es un árbol.

$G =$  árbol $K_{1,1}$ $H =$  árbol $K_{1,1}$

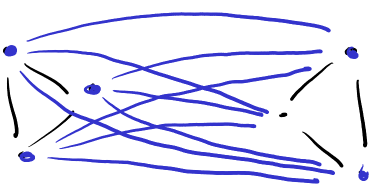
$K =$ 

no es un árbol
no es bipartito

$G =$  C_3 euleriano plano $H =$  C_3 euleriano plano

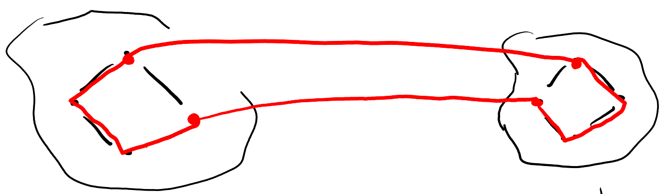
$K =$ 

todos los vértices tienen grado 5 $\Rightarrow$ no es euleriano

$K =$ 

el subgrafo azul es $K_{3,3}$

$\Rightarrow$ no es plano



G hamiltoniano — H hamiltoniano