Regla de la suma

Si una tarea se puede realizar de m formas y otra tarea se puede realizar de n formas y ambas tareas son independientes entonces hay m+n formas de realizar una de estas tareas.

ejemplo: Heladeria$_1$ = {chocolate, dulce de leche, menta} } conjuntos
Heladeria$_2$ = {limón, frutilla} disjuntos

la cantidad de sabores para elegir es $3+2=5$

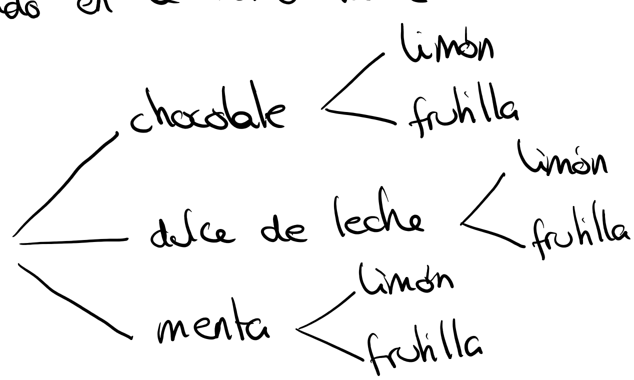
Regla del producto

Tenemos un procedimiento que se puede realizar en dos etapas

* para la primer etapa hay n resultados posibles
* para cada uno de los n resultados existen m resultados posibles para la segunda etapa.

Entonces la cantidad de formas de realizar este procedimiento es nm.

ejemplo: primero tomamos un helado en la heladería 1 y despues otro helado en la heladería 2



la cantidad de formas de elegir los dos sabores es $3 \cdot 2$

Ejercicio 1

Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

primero: ¿cuántas palabras de 6 letras?

1ra letra	2da letra	3ra letra	4ta letra	5ta letra	6ta letra
↑	↑	↑	↑	↑	↑
27 pos.	27 pos.	27	27	27	27

por la regla del producto hay 27^6 palabras

ahora sí: ¿cuántas palabras de 6 letras que no tengan 2 consonantes ni dos vocales juntas?

CASO 1: empezando con vocal

vocal	cons.	vocal	cons	vocal	cons.
↑	↑	↑	↑	↑	↑
5 pos.	22 pos	5 pos.	22	5	22

por la regla del producto: $5^3 \cdot 22^3$ palabras

CASO 2: empezando con consonante

cons.	vocal	cons.	vocal	cons.	vocal
↑	↑	↑	↑	↑	↑
22	5	22	5	22	5

por la regla del producto $5^3 \cdot 22^3$ palabras

como los dos casos son disjuntos, por la regla de la suma la cantidad de palabras es $5^3 \cdot 22^3 + 5^3 \cdot 22^3$

otra pregunta: ¿palabras de 6 letras que no tengan 2 consonantes ni dos vocales juntas y que no repitan letras?

CASO 1: empezando con vocal

vocal	cons.	vocal	cons.	vocal	cons.
↑	↑	↑	↑	↑	↑
5	22	4	21	3	20

por la regla del producto $5 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 20$ palabras

CASO 2: empezando con consonante

cons.	vocal	cons.	vocal	cons.	vocal
↑	↑	↑	↑	↑	↑
22	5	21	4	20	3

por la regla del producto

$22 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 3$

Como los casos son disjuntos, por la regla de la suma, la cantidad de palabras es $5 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 3 \cdot 20 + 22 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 3$

Permutaciones

Tenemos un conjunto de n elementos.

una permutación de los n elementos es una lista ordenada sin elementos que se repitan

por ejemplo: tenemos el conjunto $\{A, B, C\}$

ABC, BCA, CAB, BAC, ... son permutaciones de $\{A, B, C\}$

___	___	___
↑	↑	↑
3 pos	2 pos	1 pos.

por la regla del producto hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ permutaciones de $\{A, B, C\}$

en general: cantidad de permutaciones de n elementos en general: cantidad de permutaciones de n elementos

1er lugar				...	n-ésimo lugar
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$
n pos.	$n-1$ pos.	$n-2$ pos	$n-3$		1 pos.

por la regla del producto hay $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ permutaciones de n elementos.

Ejercicio 3

(a) ¿Cuántas palabras distintas de largo 5 se pueden formar usando todas las letras de la palabra *ARBOL*?

(b) ¿ Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra *ARBOL*?

(c) ¿ Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*?

a) una palabra con las letras de ARBOL es una permutación de $\{A, R, B, O, L\}$

$\Rightarrow$ hay $5!$ palabras

b)

$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
5 pos	4 pos.	3 pos.

por la regla del producto la cantidad de palabras es $5\cdot 4\cdot 3$

c) ALGORITMO

vamos a diferenciar las dos Os

es decir vamos a contar las permutaciones de $ALGO_1RITMO_2$

hay $9!$ permutaciones

$\longrightarrow$ el problema es que estamos contando demás

$ALGO_1RITMO_2$ es la misma palabra que $ALGO_2RITMO_1$

pero las contamos como diferentes

estamos contando cada palabra 2 veces

$\longrightarrow$ la cantidad de permutaciones de ALGORITMO es $\dfrac{9!}{2}$

d) permutaciones de MANZANA

→ diferenciar las 2 Ns y las 3 As

la cantidad de permutaciones de $MA_1N_1ZA_2N_2A_3$ es $7!$

→ si permutamos las 2 N's nos da la misma palabra

$$MAN_1ZAN_2A = MAN_2ZAN_1A$$

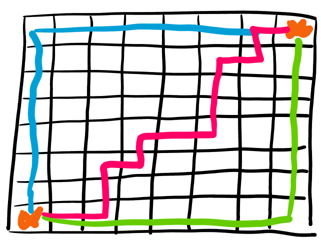
→ si permutamos las A's nos da la misma palabra

$$MA_1NZA_2NA_3 = MA_2NZA_3NA_1 = MA_3NZA_1NA_2$$
$$= MA_1NZA_3NA_2 = MA_2NZA_1NA_3 = MA_3NZA_2NA_1$$

→ total de permutaciones de MANZANA: $\dfrac{7!}{2!\,3!}$

Ejercicio 5

(c) ¿Cuántos recorridos diferentes puede realizar una torre de ajedrez para desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?



14 pos. 13 pos. 12 11 10 ... 1

AAAAAAADDDDDDD

DDDDDDDAAAAAAA

cantidad de recorridos posibles = cantidad de palabras con 7 A's y 7 D's

$$= \frac{14!}{7!\,7!}$$