Ejercicio 6

Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

$e=1$

$v=2$

G grafo plano.

* G grafo plano simple y conexo con $|V| \geq 3$ entonces

$$\boxed{e \leq 3v - 6}$$

* G grafo plano con $|V| \geq 3$

queremos ver que G tiene un vertice de grado ≤ 5

supongamos por absurdo que todos los vertices tienen grado ≥ 6

$$\sum gr(v) = 2e$$

$$\sum gr(v) = \underbrace{gr(v_1)}_{\geq 6} + \underbrace{gr(v_2)}_{\geq 6} + \dots + \underbrace{gr(v_n)}_{\geq 6} \geq 6v$$

$$6v \leq \sum gr(v) = 2e \Rightarrow 6v \leq 2e$$

$$\Rightarrow \boxed{3v \leq e}$$

$$\left.\begin{array}{l} e \leq 3v - 6 \\ 3v \leq e \end{array}\right\} \Rightarrow 3v \leq 3v - 6 \Rightarrow 0 \leq -6 \quad \text{absurdo!}$$

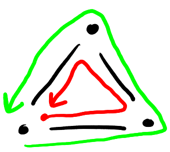
* vamos a probar que

G grafo simple, conexo, plano con $\underline{|V| \geq 3}$ entonces $e \leq 3v - 6$

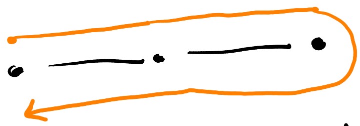
$\rightarrow$ G verifica la formula de Euler

$$v - e + r = 2$$

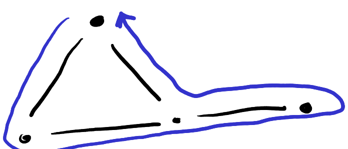
$\rightarrow$ como $|V| \geq 3$



2 regiones de grado 3



1 región de grado 4



1 región de grado 3

y una región de grado 5

como $|V| \geq 3$, la regiones del grafo tienen grado ≥ 3

$$\sum gr(R) = 2e$$

$$\sum gr(R) = \underbrace{gr(R_1)}_{\geq 3} + \underbrace{gr(R_2)}_{\geq 3} + \dots + \underbrace{gr(R_r)}_{\geq 3} \geq 3r$$

$$3r \leq \sum gr(R) = 2e \quad \Rightarrow \boxed{3r \leq 2e}$$

formula de Euler: $v - e + r = 2$

$$\Rightarrow 3v - 3e + 3r = 6$$

$$\Rightarrow 6 = 3v - 3e + \underbrace{3r}_{\leq 2e} \leq 3v - 3e + 2e$$

$$\Rightarrow 6 \leq 3v - e$$

$$\Rightarrow \boxed{e \leq 3v - 6}$$

Julio 2022

Múltiple Opción 1

La cantidad de relaciones de equivalencia que se pueden definir sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ es:
A) 14; B) 15; C) 16; D) 17.

$A = \{1,2,3,4\}$

$A/_R$ = conjunto de los clases de equivalencia

$[1]$ = todos los elementos que están relacionados con 1

$$\{1,2,3,4\} \rightsquigarrow \overbrace{\{1,2\} \quad \{3,4\}}^{\text{conjuto cociente}}$$

Dar una relación de equivalencia es lo mismo que decir quién es el conjuto cociente.

CASO 1: el conjunto cociente tiene 4 elementos

$$A/_R = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

una relación de equivalencia

CASO 2: el conjunto cociente tiene 3 elementos

$A/R = \{\{x, y\}, \{z\}, \{t\}\}$

$A/R = \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$

$\Rightarrow$ para definir la relación hay que elegir los dos elementos que estén en la clase con dos elementos

$\binom{4}{2} = 6$ relaciones de equivalencia

CASO 3: el conjunto cociente tiene dos elementos: dos clases con dos elementos

$A/R = \{\underbrace{\{x, y\}}, \{z, t\}\}$ ← elegimos estos dos

$A/R = \{\{2, 3\}, \{1, 4\}\}$ son la misma relación

$A/R = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$

$A/R = \{\{1, x\}, \{z, t\}\}$ ← elegimos este

$\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$ relaciones de equivalencia

CASO 4: el conjunto cociente tiene 2 elementos: una clase con 1 elemento y una clase con 3 elementos

$A/R = \{\{x\}, \{y, z, t\}\}$ ← elegir este

$\binom{4}{1} = 4$ relaciones de equivalencia

CASO 5: el conjunto cociente tiene un solo elemento

$A/R = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$

hay una sola relación de equivalencia

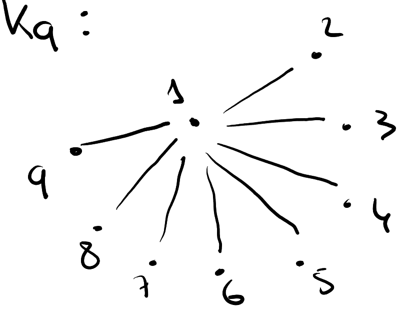
como los casos son disjuntos, la cantidad de relaciones de equivalencia es:

$$1+6+3+4+1 = 15$$

Múltiple Opción 3

Sea a_n la longitud máxima de un recorrido (abierto o cerrado) del grafo completo K_n. Entonces:
A) $a_9 = 35$ y $a_{10} = 40$; B) $a_9 = 35$ y $a_{10} = 41$; C) $a_9 = 36$ y $a_{10} = 40$; D) $a_9 = 36$ y $a_{10} = 41$.

* K_9 :



$$\sum gr(v) = 2|E|$$

$$\underbrace{\sum gr(v)}_{=8} = 9 \cdot 8$$

$$|E| = \frac{\sum gr(v)}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

en K_9 hay 9 vertices de grado 8

entonces K_9 tiene un circuito euleriano

$\Rightarrow$ K_9 tiene un circuito de largo 36

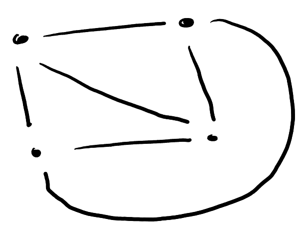
* K_{10} tiene 10 vertices de grado 9

$\rightarrow$ K_{10} no tiene circuito euleriano

$\rightarrow$ K_{10} no tiene recorrido euleriano

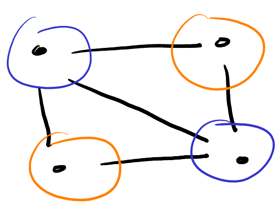
K_{10} no tiene un recorrido de largo $\frac{10 \cdot 9}{2}$

* K_4



4 vertices de grado 3

$G = K_4$ - una arista

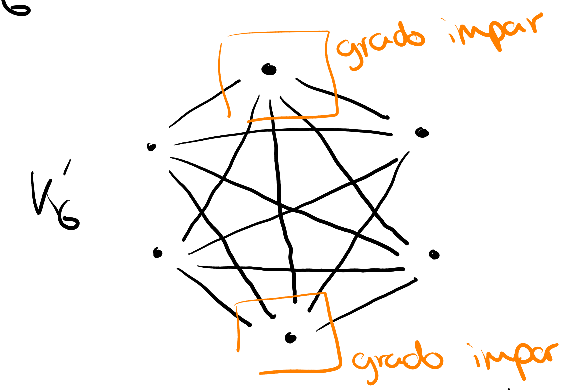


2 de grado par y 2 de grado impar

$\Rightarrow$ G tiene recorrido euleriano

la longitud máxima de un recorrido en K_4 es 5

* K_6 tiene 6 vertices de grado 5



tenemos que ver cuantas aristas hay que quitarle a K_6 para tener dos vertices de grado impar y el resto de grado par

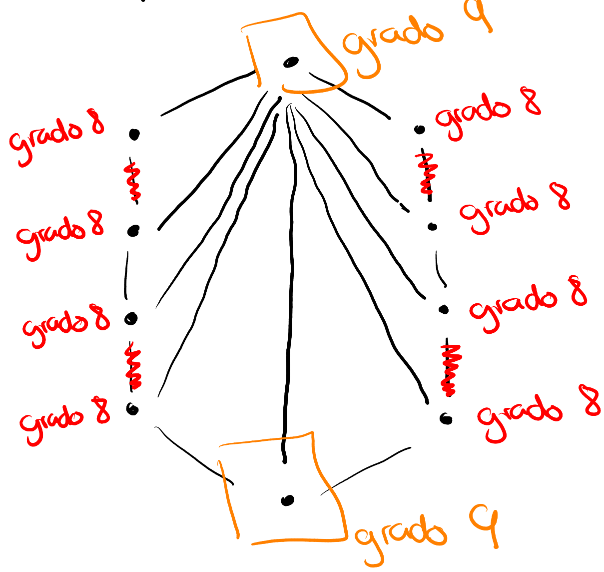
$\Rightarrow$ hay que sacar 2 aristas

K_6' tiene un recorrido euleriano

la longitud máxima de un recorrido en K_6 es $\frac{6 \cdot 5}{2} - 2$

* K_{10} tiene 10 vertices de grado 9

¿cuántas aristas hay que quitarle para tener dos vertices de grado impar y el resto de grado par?



K_{10} - 4 aristas tiene 2 vertices de grado impar y 8 vertices de grado par

$\Rightarrow K_{10}$ - 4 aristas tiene recorrido euleriano

la longitud máxima de un recorrido en K_{10} es $\frac{10 \cdot 9}{2} - 4$