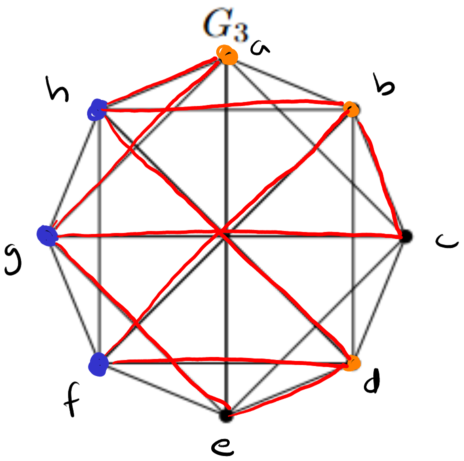
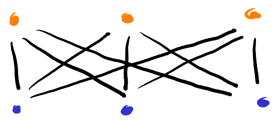
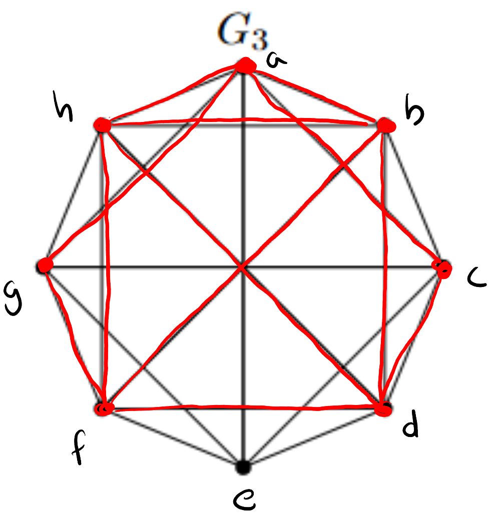
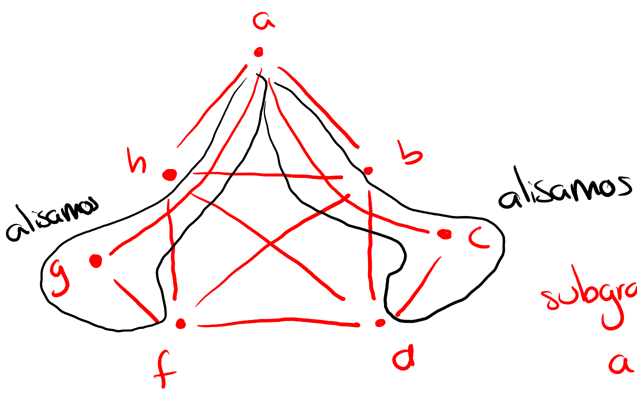
Ejercicio 1



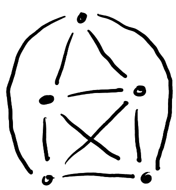
$K_{3,3}$

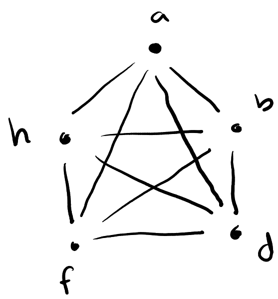






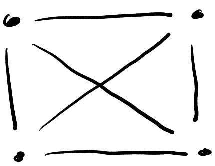
subgrafo homeomorfo a K_5



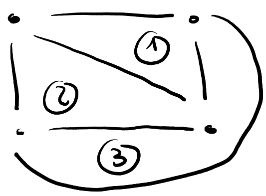


Regiones de un grafo plano

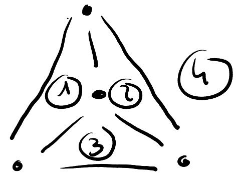
Son las regiones quedan delimitadas por las aristas en una inmersión plana



K_4



(4) = región infinito



K_4 tiene 4 regiones

Formula de Euler

G grafo simple, plano y conexo

v = cantidad de vertices

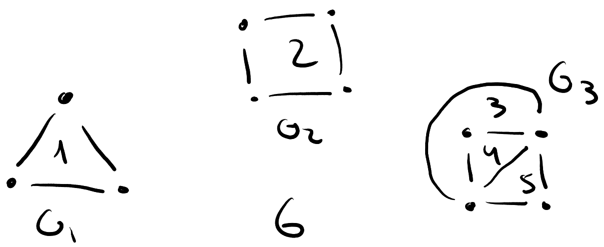
e = cantidad de aristas

r = cantidad de regiones

$$\boxed{v - e + r = 2}$$

Ejercicio 4
Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

$G = (V, E)$ grafo plano



G_1 tiene 2 regiones
G_2 tiene 2 regiones
G_3 tiene 4 regiones
si sumamos estamos contando la región infinita 3 veces

G plano $\Rightarrow$ todas las componentes conexas son grafos plano

Sean $G_1, G_2, \ldots, G_k$ las componentes conexas de G

G_i es un grafo simple, plano y conexo $\Rightarrow$ $v_i - e_i + r_i = 2$

$|V| = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$

$|E| = e_1 + e_2 + \ldots + e_k$

$r_1 + r_2 + \ldots + r_k - (k-1) = r \Rightarrow r_1 + r_2 + \ldots + r_k = r + (k-1)$

$(v_1 - e_1 + r_1) + (v_2 - e_2 + r_2) + \ldots + (v_k - e_k + r_k) = 2k$

$$\underbrace{v_1 + v_2 + \ldots + v_k}_{|V|} - \underbrace{(e_1 + e_2 + \ldots + e_k)}_{|E|} + \underbrace{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}_{r + (k-1)} = 2k$$

$$|V| - |E| + r + (k-1) = 2k$$

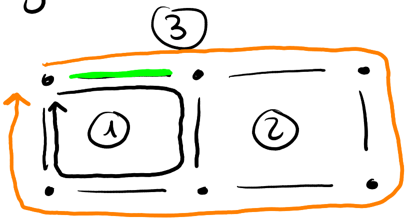
$$|V| - |E| + r = 2k - (k-1)$$

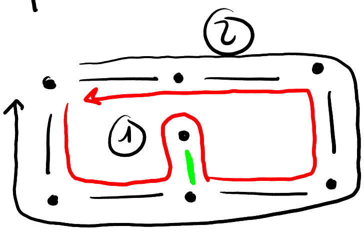
$$\boxed{|V| - |E| + r = k + 1}$$

Grado de una región de un grafo plano

R región de un grafo plano

$gr(R)$ = longitud del camino cerrado que delimita la región





la región ① tiene grado 4

la región ③ tiene grado 6

la región ② tiene grado 6

la región ① tiene grado 8

cada arista → aporta 1 al grado de dos regiones distintas
ó
→ aporta 2 al grado de una región

$$\boxed{\sum gr(R) = 2|E|}$$

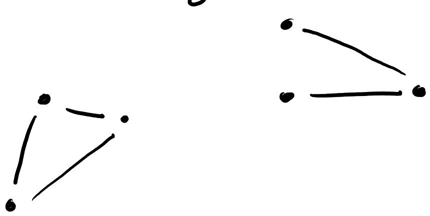
$K_{3,3}$ no es plano:

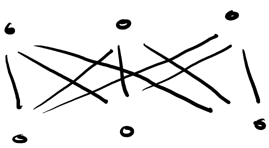
Supongamos por absurdo que $K_{3,3}$ es plano

entonces verifica la formula de Euler:

$$v - e + r = 2$$

con $v = 6$ y $e = 9$.





Como $K_{3,3}$ no tiene ciclos, las regiones tienen por lo menos grado 4.

$$4r \leq \underbrace{\sum gr(R)}_{\geq 4} = 2e$$

$$\sum gr(R) = \underbrace{gr(R_1)}_{\geq 4} + \underbrace{gr(R_2)}_{\geq 4} + \dots + \underbrace{gr(R_r)}_{\geq 4} \geq 4 + 4 + \dots + 4 = 4r$$

$$4r \leq \sum gr(R) = 2e$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{2e}{4} = \frac{e}{2} = \frac{9}{2}$$

$$2 = v - e + r \leq 6 - 9 + \frac{9}{2} = -3 + 4,5 = 1,5$$

absurdo!

---

* $\sum gr(v) = 2e$ (G cualquiera)
* G plano, simple y conexo: $v - e + r = 2$ (fórmula de Euler)

$$\sum gr(R) = 2e$$

Ejercicio 5
Hallar la menor cantidad de vértices que puede tener un grafo simple, plano, conexo y 3-regular, tal que cada una de sus regiones tiene al menos 5 vértices.

G un grafo que cumple con estas condiciones

* G es simple, plano y conexo

cantidad de vertices

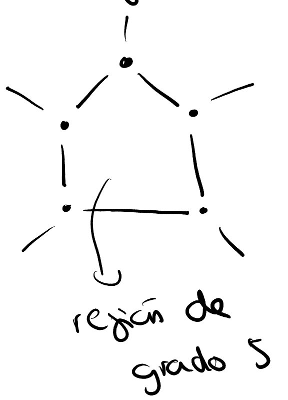
$\Rightarrow$ verifica la fórmula de Euler: $v - e + r = 2$

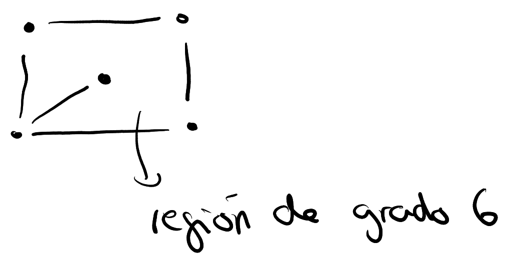
* G es 3-regular

$\Rightarrow gr(v) = 3$ para todo vertice v

$$\left.\begin{array}{l} \sum \underbrace{gr(v)}_{\overset{\shortparallel}{3}} = 3v \\ \sum gr(v) = 2e \end{array}\right] \Rightarrow 3v = 2e \Rightarrow e = \frac{3}{2}v$$

* cada región tiene al menos cinco vertices





$gr(R) \geq 5$ para toda región R

$$\sum gr(R) = 2e$$

$$\sum gr(R) = \underbrace{gr(R_1)}_{\geq 5} + \underbrace{gr(R_2)}_{\geq 5} + \dots + \underbrace{gr(R_r)}_{\geq 5} \geq 5r$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum gr(R) = 2e \\ 5r \leq \sum gr(R) \end{array}\right] \Rightarrow 5r \leq 2e \Rightarrow r \leq \frac{2e}{5} \underset{\substack{\uparrow \\ 2e=3v}}{=} \frac{3v}{5}$$

* reemplazamos todo en la fórmula de Euler

$$2 = v - e + r \leq v - \frac{3}{2}v + \frac{3}{5}v = \frac{10v - 3 \cdot 5v + 3 \cdot 2v}{10} = \frac{1}{10}v$$

$$e = \frac{3}{2}v$$

$$r \leq \frac{3}{5}v$$

tenemos $2 \leq \frac{1}{10}v \Rightarrow 20 \leq v$

la menor cantidad de vertices que puede tener G es 20