Practico 9

Ejercicio 8

(a) Demostrar que dos grafos son isomorfos si y sólo si sus grafos complemento lo son.

(b) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 3 son isomorfos?

(c) Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de G.

(d) Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de n vértices.

(e) Construir grafos autocomplementarios con 4 y con 5 vértices.

(f) Determinar para qué valores de n existe un grafo autocomplementario de n vértices. *Sugerencia:* Demostrar que n debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalizar la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregar un vértice al grafo anterior y unir en forma adecuada.

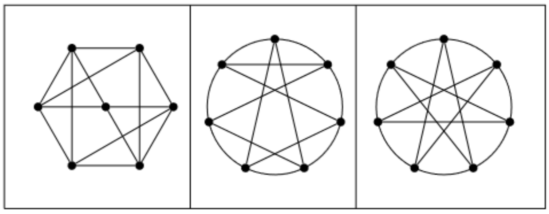
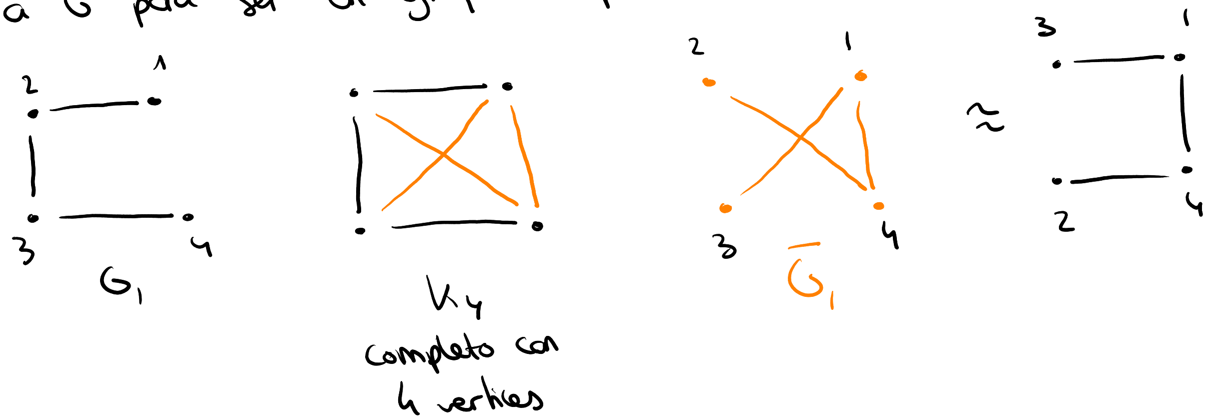


Figura 3

G un grafo

el grafo complemento de G el grafo formado por las aristas que le faltan a G para ser un grafo completo



a) Dos grafos son isomorfos sii sus grafos complemento son isomorfos

$(\Rightarrow)$ $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ isomorfos

entonces existe $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que:

* φ es biyectiva

* $v, v' \in V_1$ son adyacentes en $G_1 \iff \varphi(v), \varphi(v')$ son adyacentes en G_2

queremos ver que $\bar{G}_1$ y $\bar{G}_2$ son isomorfos

veamos que $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo de $\bar{G}_1$ en $\bar{G}_2$

* φ biyectiva ✓

* $v,v' \in V_1$ adyacentes en $\overline{G_1}$ $\iff$ $v,v' \in V_1$ no son adyacentes en G_1

$\iff \varphi(v), \varphi(v')$ no son adyacentes en G_2

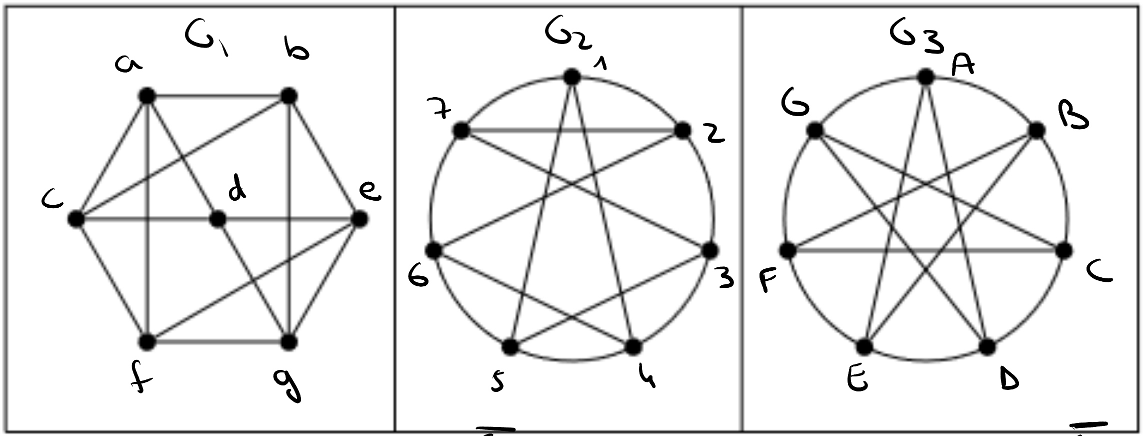
$\iff \varphi(v), \varphi(v')$ son adyacentes en $\overline{G_2}$ ✓

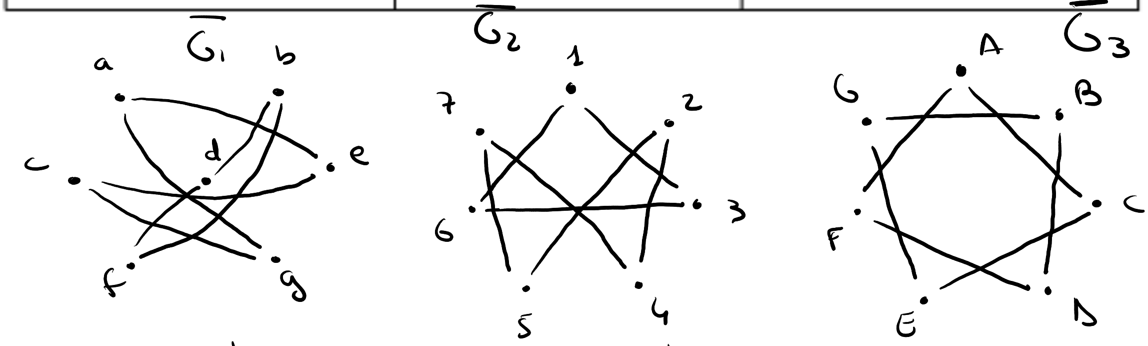
entonces $\varphi: V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entre $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$

($\Leftarrow$) $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ isomorfos $\Rightarrow$ $\overline{\overline{G_1}}$ y $\overline{\overline{G_2}}$ isomorfos

$\Rightarrow$ G_1 y G_2 isomorfos

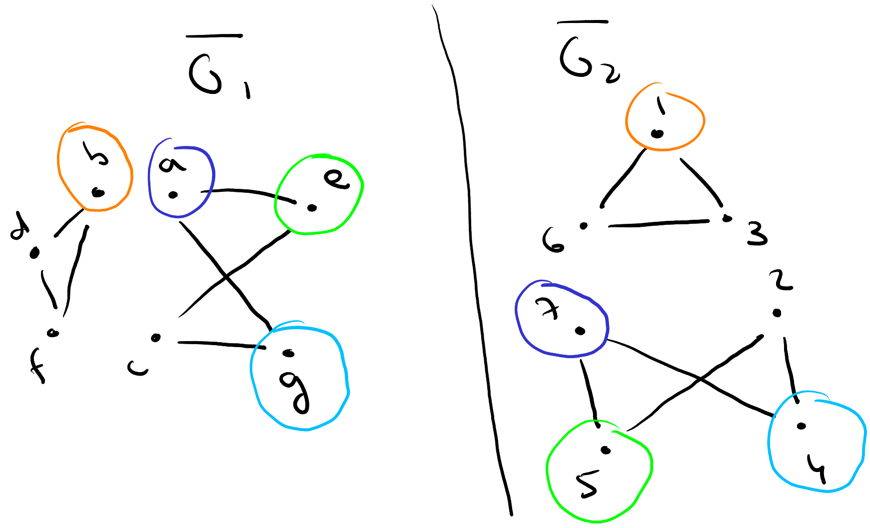
b)





2 componentes conexas | 2 componentes conexas | 1 componente conexa

* $\overline{G_3}$ y $\overline{G_2}$ no son isomorfos $\Rightarrow$ G_3 y G_2 no son isomorfos
* $\overline{G_3}$ y $\overline{G_1}$ no son isomorfos $\Rightarrow$ G_3 y G_1 no son isomorfos



$\varphi: V_1 \to V_2$

$\varphi(b) = 1$

$\varphi(d) = 6$

$\varphi(f) = 3$

$\varphi(a) = 7$

$\varphi(g) = 4$

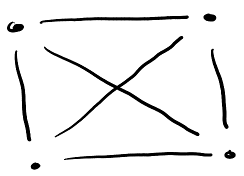
$\varphi(e) = 5$

$\varphi(c) = 2$

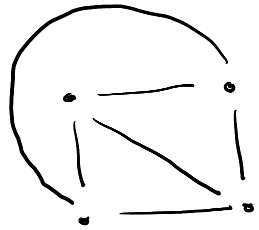
$\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos $\Rightarrow$ G_1 y G_2 son isomorfos

GRAFOS PLANOS

Decimos que un grafo G es plano si lo podemos dibujar sin que haya aristas que se crucen



K_4



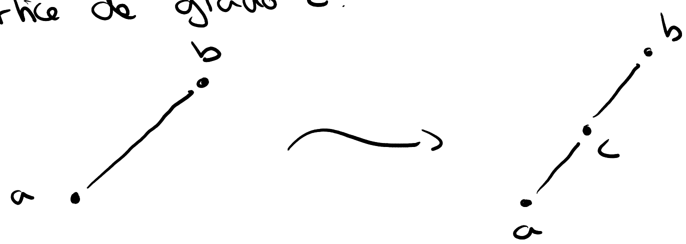
inmersión plana de K_4

$\Rightarrow K_4$ es plano

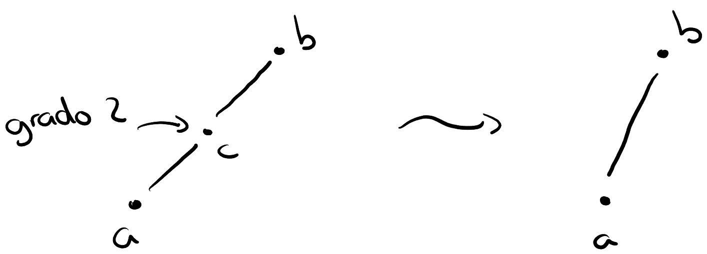
Grafos homeomorfos

Decimos que G_1 y G_2 son homeomorfos si podemos transformar uno en el otro con estas operaciones

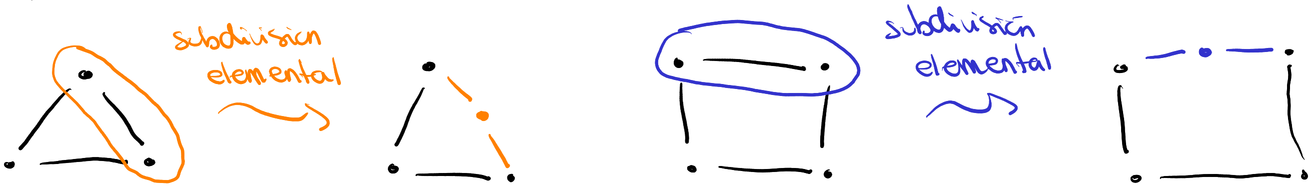
1. subdivisión elemental: dividir una aristas en dos agregando un vertice de grado 2.



2. alisado: reemplazar dos aristas por una quitando un vertice de grado 2



ej: todos los ciclos son homeomorfos



3-ciclo 4-ciclo 4-ciclo 5-ciclo

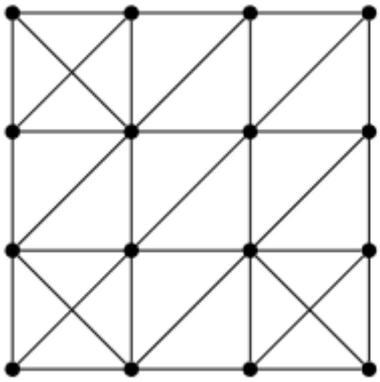
en estas dos operaciones solamente intervienen los vertices de grado 2

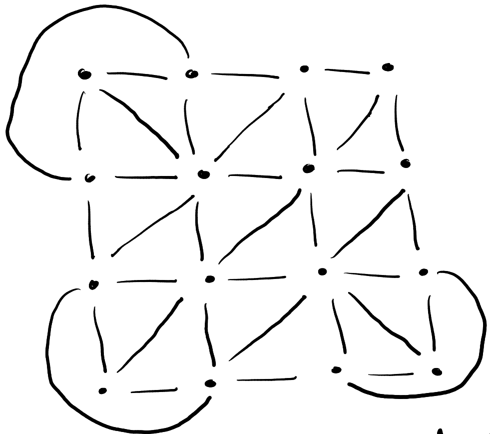
Teorema de Kuratowsky

G no es plano $\Leftrightarrow$ G tiene un subgrafo que es homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$

Ejercicio 1

G_1

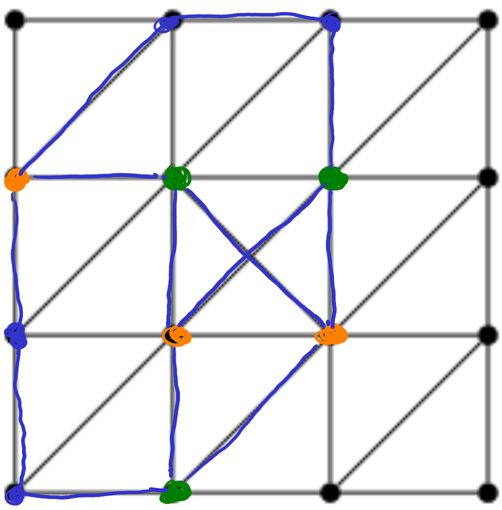




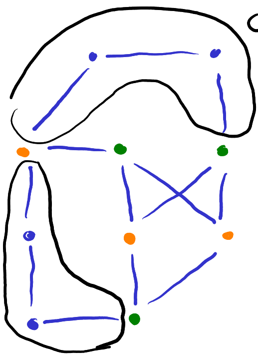
inmersión plana de G_1

$\Rightarrow G_1$ es plano

G_2

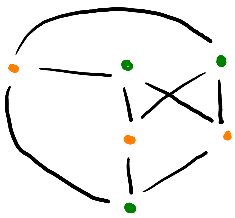


alisamos



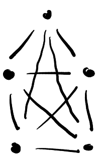
alisamos

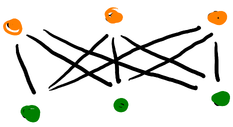
subgrafo de G_2



$K_{3,3}$

K_5

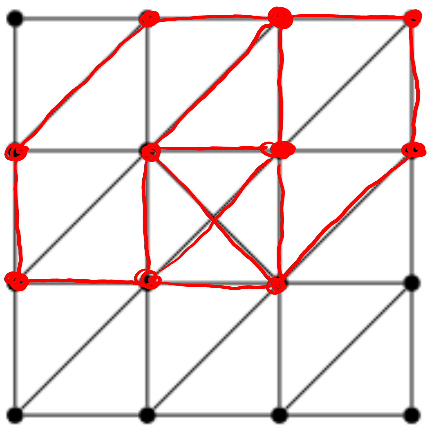


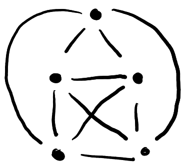


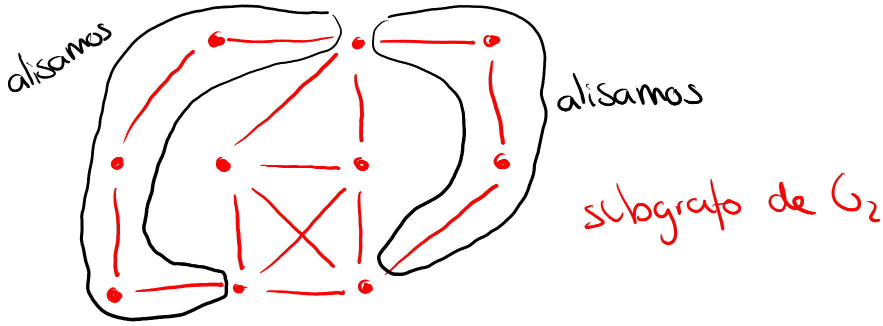
G_2 tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$

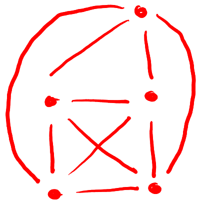
$\Rightarrow$ no es plano

G_2









K_5

G_2 tiene un subgrafo homeomorfo a K_5

$\Rightarrow G_2$ no es plano