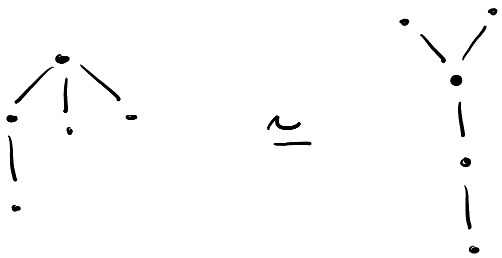
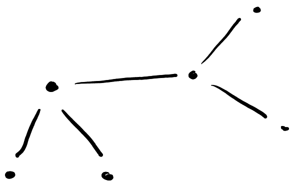
Grafos isomorfos

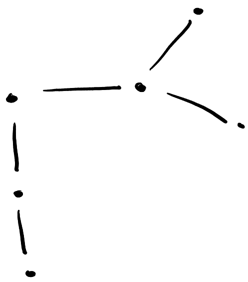
G_1 y G_2 son grafos isomorfos si son el mismo grafo dibujado de forma diferente y cambiando el nombre de los vertices



→ si G_1 y G_2 son isomorfos entonces cumplen exactamente las mismas propiedades



G_1

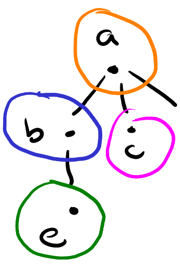


G_2

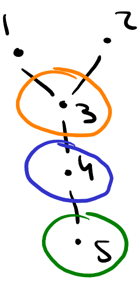
G_1 tiene dos vertices de grado 3 y G_2 tiene solamente uno de grado 3 $\Rightarrow$ G_1 y G_2 no son isomorfos

Formalmente: $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe $\varphi: V_1 \to V_2$ tal que

* φ es biyectiva
* $v, v' \in V_1$ son adyacentes en G_1 $\Leftrightarrow$ $\varphi(v), \varphi(v')$ son adyacentes en G_2



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$

$\varphi: V_1 \to V_2$

$\varphi(a) = 3$

$\varphi(b) = 4$

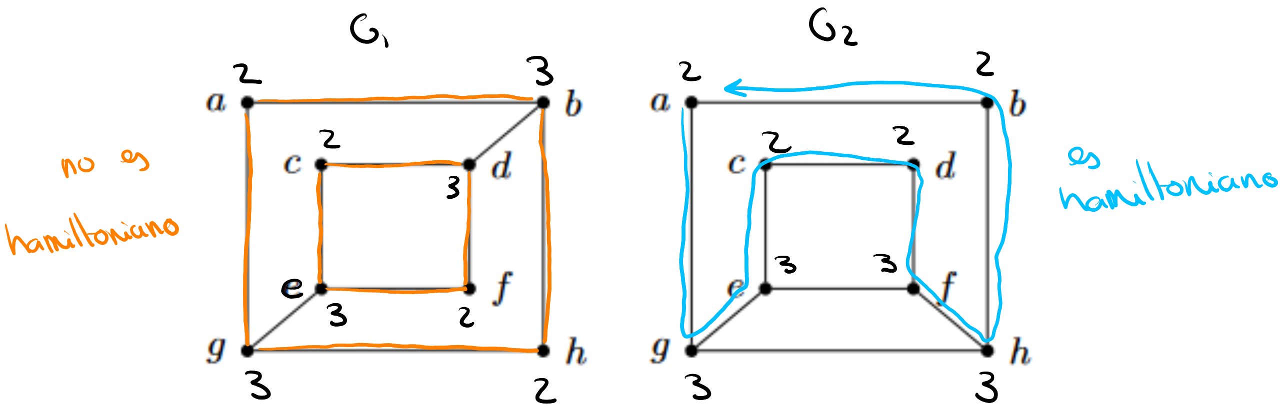
$\varphi(e) = 5$

$\varphi(c) = 1$

$\varphi(d) = 2$

Ejercicio 2

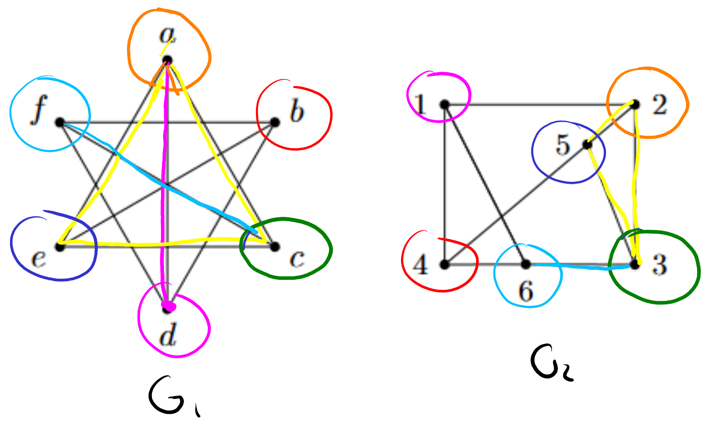
Determinar si son isomorfos:



G_1 y G_2 no son isomorfos:

justificaciones:

* en G_2 los 4 vertices de grado 3 forman un ciclo pero en G_1 no.
* G_1 tiene diámetro 3 y G_2 tiene diámetro 4.
* G_2 es hamiltoniano pero G_1 no



$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$

$\varphi(a) = 2$ $\qquad$ $\varphi(f) = 6$

$\varphi(c) = 3$ $\qquad$ $\varphi(d) = 1$

$\varphi(e) = 5$ $\qquad$ $\varphi(b) = 4$

φ es biyectiva

v, v' adyacentes en G_1 $\iff$ $\varphi(v), \varphi(v')$ adyacentes en G_2

Ejercicio 9 Representar a todos los árboles no isomorfos con 6 vértices.

$G=(V,E)$ arbol

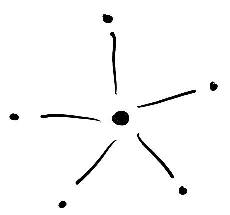
$|V|=6 \Rightarrow |E|=|V|-1=5$

$$\sum_{v\in V} gr(v) = 2|E| = 10$$

$$\overset{3}{gr(v_1)} + \overset{2}{gr(v_2)} + \overset{2}{gr(v_3)} + \overset{1}{gr(v_4)} + \overset{1}{gr(v_5)} + \overset{1}{gr(v_6)} = 10 \quad \text{con } gr(v_i) \geq 1$$

2	2	1	1	2	2
1	1	2	2	2	2
5	1	1	1	1	1

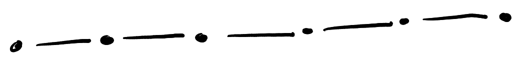
1) un vertice de grado 5 y cinco vertices de grado 1



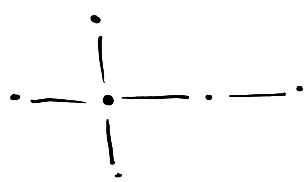
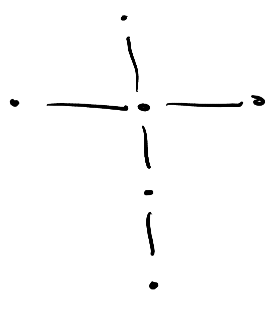
1 arbol

2) cuatro vertices de grado 2 y dos vertices de grado 1

1 arbol

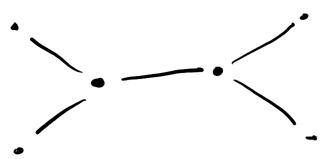


3) un vertice de grado de 4, cuatro de grado 1, un vertice de grado 2

 $\simeq$ 

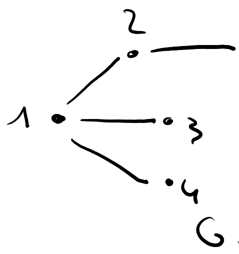
1 arbol

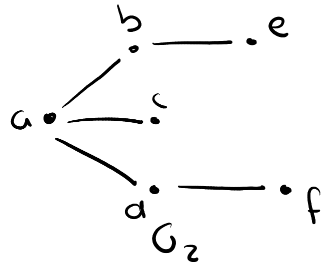
4) dos vertices de grado 3 y cuatro vertices de grado 1



1 arbol

(5) un vertice de grado 3, dos vertices de grado 2 y tres vertices de grado 1





$diam(G_1) = 4$

los vertices de grado 2 son adyacentes

$diam(G_2) = 4$

los vertices de grado 2 no son adyacentes

2 arboles no isomorfos

total: 6 arboles no isomorfos

Ejercicio 5

(a) Determinar el número de vértices de un grafo simple 3-regular con 9 aristas.

(b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

(c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

a) $G = (V, E)$

$|E| = 9$

G es 3-regular: todos los vertices tienen grado 3

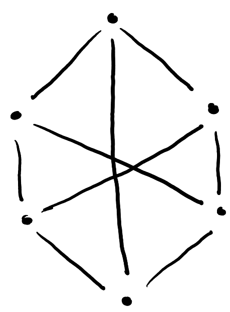
sea $n = |V|$

$$\sum_{v \in V} \overbrace{gr(v)}^{=3} = 2|E|$$

$$3n = 2 \cdot 9$$

$\Rightarrow 3n = 18$

$\Rightarrow n = 6$



(o el del ejercicio 2b)

b) $G = (V, E)$

$|E| = 10$

dos vertices de grado 4 y el resto de grado 3

$n = |V|$ $\quad n = \underbrace{\# \text{ vertices de grado } 4}_{=2} + \# \text{ vertices de grado } 3$

$\Rightarrow \# \text{ vertices de grado } 3 = n - 2$

$$\underbrace{\sum_{v \in V} gr(v)}_{2 \cdot 4 + (n-2) \cdot 3} = 2|E| = 2 \cdot 10 = 20$$

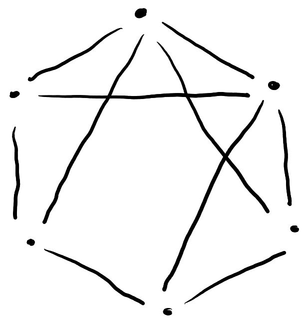
$$\sum_{v \in V} gr(v) = \underbrace{gr(v_1)}_{\overset{\shortparallel}{4}} + \underbrace{gr(v_2)}_{4} + \overbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{gr(v_3)} + \dots \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{gr(v_n)}}^{n-2 \text{ terminos}}$$

$$8 + (n-2) \cdot 3 = 20$$

$$3n + 2 = 20$$

$$3n = 18$$

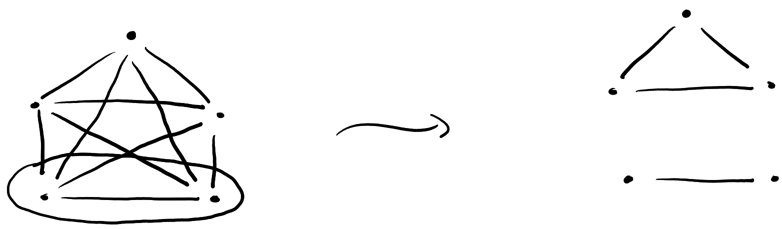
$$\boxed{n = 6}$$



Practico 8

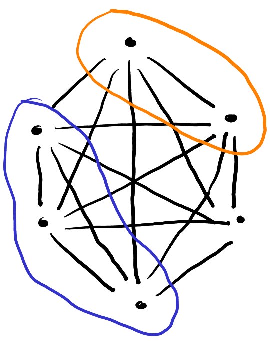
Ejercicio 5 Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a K_n para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

K_5 :



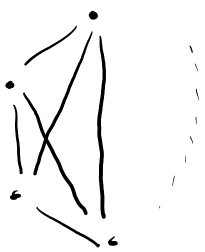
hay que sacar 6 aristas

K_6 :



* para desconectar dos vertices hay que quitar $2 \cdot 4$ aristas
* para desconectar tres vertices hay que quitar $3 \cdot 3$ aristas

K_n



* para desconectar 2 vertices hay que quitar $2(n-2)$ aristas
* para desconectar j vertices hay que quitar $j(n-j)$ aristas.

queremos minimizar $f(j) = j(n-j) = nj - j^2 \quad j \in [2, n-2]$

$f'(j) = n - 2j$

$f'(j) = 0 \Rightarrow n - 2j = 0 \Rightarrow j = \frac{n}{2}$

f tiene un extremo en $\frac{n}{2}$

$f''(j) = -2 < 0$

f tiene un máximo en $\frac{n}{2}$

f tiene mínimo en $j = 2$

la cantidad mínima de aristas que podemos quitar es $2(n-2)$