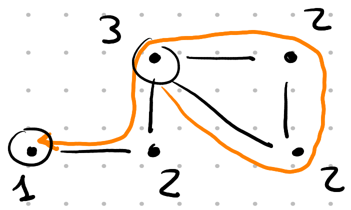
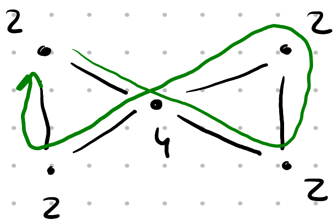
Grafos eulerianos

* recorrido euleriano: $\underbrace{\text{recorrido}}_{\text{no repite aristas}}$ que pasa por todas las aristas



* circuito euleriano: $\underbrace{\text{circuito}}_{\text{no repite aristas}}$ que pasa por todas las aristas

empieza y termina en el mismo vertice



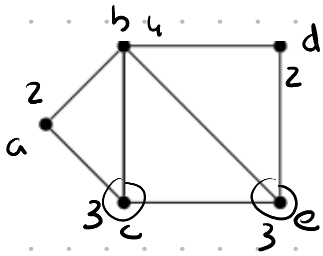
Teorema: $G=(V,E)$ grafo conexo

* G tiene un circuito euleriano $\Leftrightarrow$ todos los vertices tienen grado par

* G tiene un recorrido euleriano $\Leftrightarrow$ hay exactamente dos vertices de grado impar y el resto tienen grado por

$\Rightarrow$ el recorrido empieza en un vertice de grado impar y termina en el otro vertice de grado impar

Ejercicio 1 Hallar un recorrido o circuito euleriano para cada grafo o demostrar que no existe.

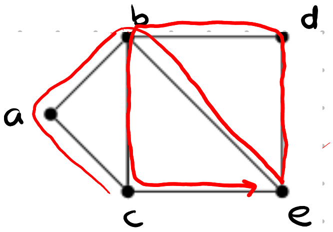


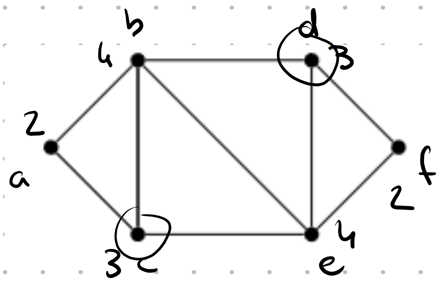
* G tiene vertices de grado impar

$\Rightarrow$ no tiene circuito euleriano

* G tiene dos vertices de grado impar y el resto son de grado par

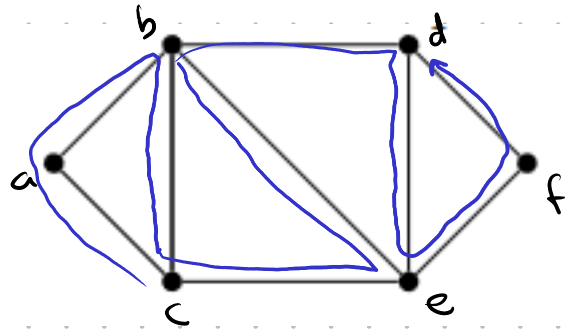
$\Rightarrow$ tiene un recorrido euleriano

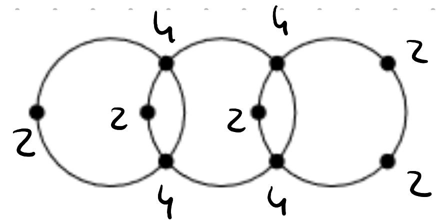




* G tiene vertices de grado impar
  ⟹ no tiene circuito euleriano

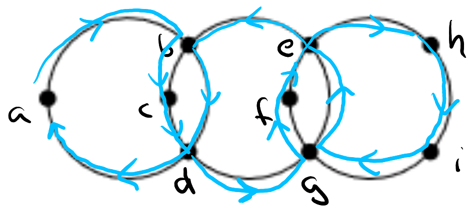
* G tiene dos vertices de grado impar y el resto son de grado par
  ⟹ tiene recorrido euleriano





todos los vertices de G tienen grado par:

* G no tiene recorrido euleriano
* G tiene circuito euleriano

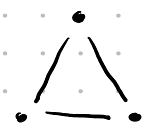


Ejercicio 6

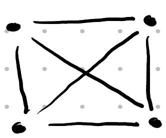
Determinar los valores de n para los cuales K_n tiene un circuito/recorrido euleriano.

K_2:  tiene recorrido euleriano

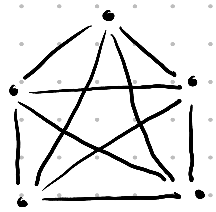
no tiene circuito euleriano

K_3:  los 3 vertices tienen grado 2

* tiene circuito euleriano
* no tiene recorrido euleriano

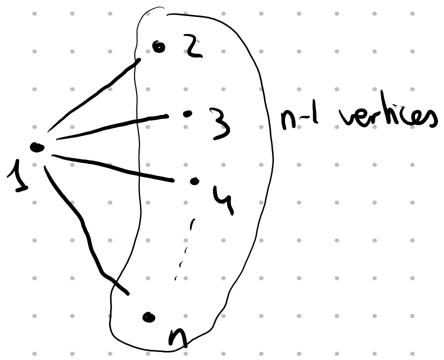
K_4:  los 4 vertices tienen grado 3

* no tiene circuito euleriano
* no tiene recorrido euleriano

K_5: 

los 5 vertices tienen grado 4

* tiene circuito euleriano
* no tiene recorrido

K_n: 

fallan aristas

todos los vertices de K_n tienen grado $n-1$

* K_2 tiene recorrido euleriano
* si $n \geq 3$, todos los vertices de K_n tienen el mismo grado y por lo tanto no hay dos vertices de grado impar y el resto de grado par

  $\Rightarrow$ si $n \geq 3$ entonces K_n no tiene recorrido euleriano

* K_n tiene circuito euleriano $\Leftrightarrow$ todos los vertices tienen grado par

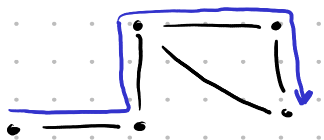
  $\Leftrightarrow$ $n-1$ es par

  $\Leftrightarrow$ n es impar

Grafos hamiltonianos

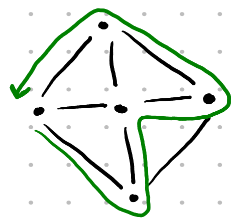
* camino hamiltoniano: camino simple que pasa por todos los vertices

  (camino simple: no repite vertices)



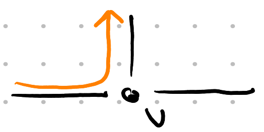
* ciclo hamiltoniano: ciclo que pasa por todos los vertices

  (ciclo: no repite vertices (salvo el primero))



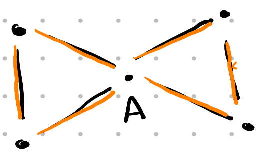
herramienta:

$G = (V, E)$ grafo con un ciclo hamiltoniano



el ciclo hamiltoniano pasa por exactamente dos aristas de cada vertices

ej:

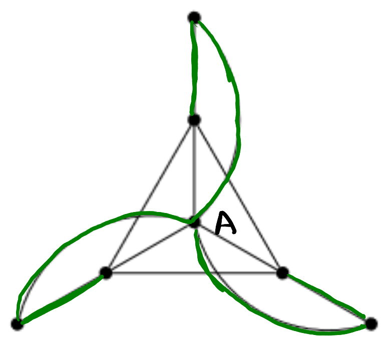


si este grafo tiene un ciclo hamiltoniano entonces las aristas anaranjadas tienen que ester en el ciclo

$\Rightarrow$ el ciclo pasa por 4 aristas de A y esto es absurdo

Ejercicio 3

Encontrar un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la figura.

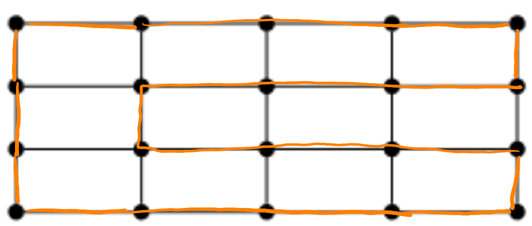


Supongamos que tiene un ciclo hamiltonianos

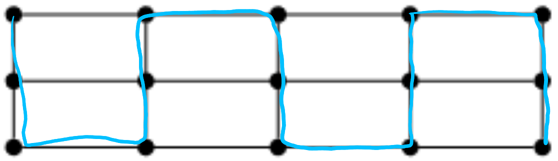
$\Rightarrow$ las aristas verdes tienen que ester en el ciclo hamiltoniano

entonces el ciclo pasa por tres aristas de A lo que implica que el ciclo pasa varias veces por A

absurdo!

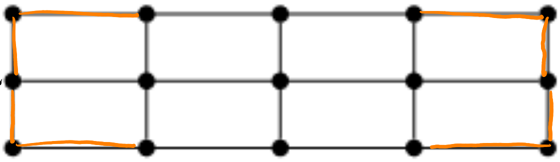


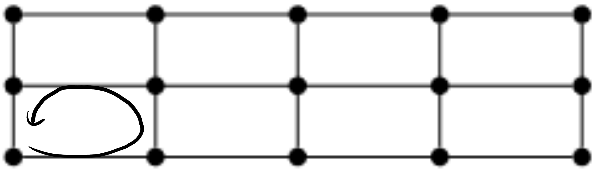
tiene ciclo hamiltoniano



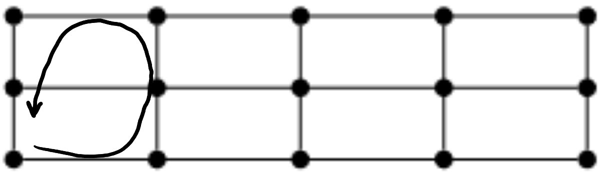
tiene camino hamiltoniano

G:

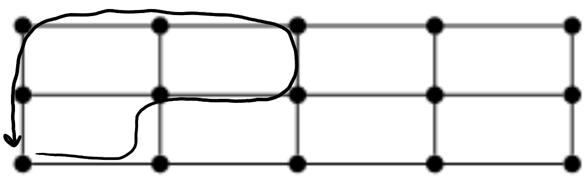




ciclo de largo 4



ciclo de largo 6

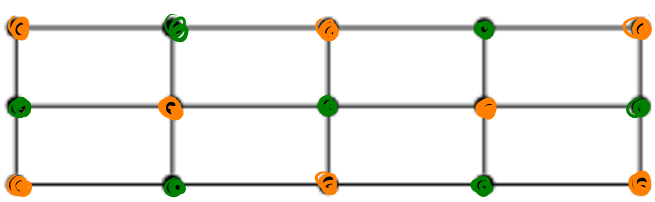


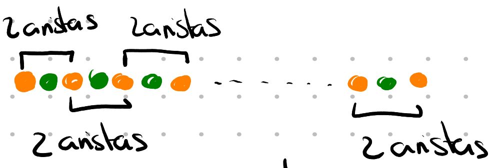
largo 8

G tiene 15 vertices

entonces un ciclo hamiltoniano tendría largo igual a 15

veamos que G solamente tiene ciclos de largo par.





Si un camino simple empieza en un vertice naranja y termina en un vertice naranja entonces tiene una cantidad par de aristas

en particular los ciclos tienen una cantidad par de aristas

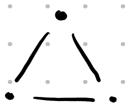
Ejercicio 8

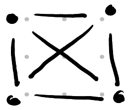
(a) Determinar la cantidad de triángulos que tiene K_n.

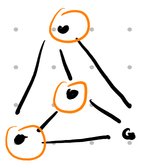
(b) Determinar la cantidad de caminos simples no triviales que tiene $K_{1,n}$.

(c) Determinar la cantidad de k-ciclos que hay en la rueda W_n.

a) cantidad de 3-ciclos de K_n

K_3:  un 3-ciclo

K_4: 

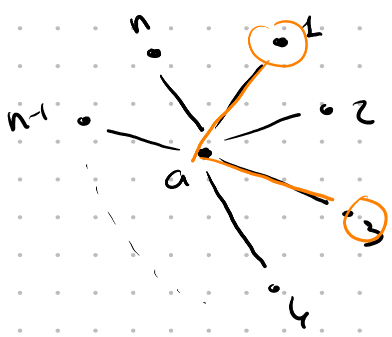
 cuatro 3-ciclo

$\binom{4}{3} = 4$

para obtener un 3-ciclo en K_n alcanza con elegir 3 vertices

$\Rightarrow \binom{n}{3}$ 3-ciclos en K_n

b) cantidad de caminos simples en $K_{1,n}$



* caminos simples de largo 1

hay dos caminos simples de largo 1 por cada aristas

$\Rightarrow 2n$ caminos simples

* caminos simples de largo 2

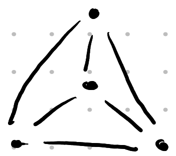
elegimos dos vertices de "los de afuera" con orden

$\Rightarrow A^n_2 = n(n-1)$ caminos simples

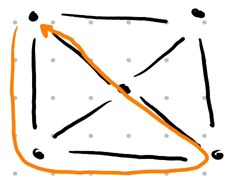
la cantidad de caminos simples es: $2n + n(n-1) = n(n+1)$

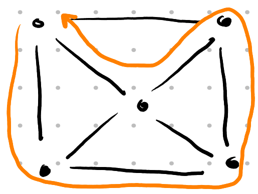
c) cantidad de k-ciclos en W_n

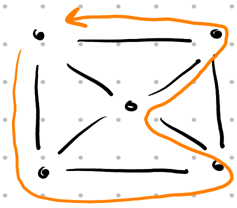
W_3:



W_4:







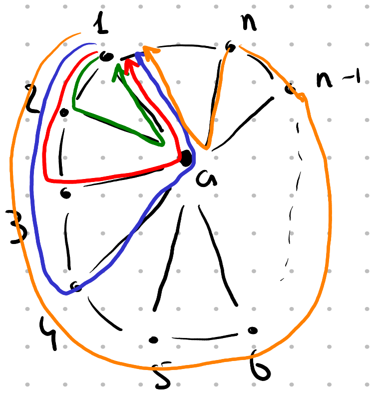
ciclos en W_4:

3-ciclos: 4

4-ciclos: 1 que no pasa por el centro
4 que pasan por el centro

5-ciclos: 4

k-ciclos en W_n



3-ciclos: n

4-ciclos: n

5-ciclos: n

⋮

$(n-1)$-ciclos: n

n-ciclos: $n+1$ $\begin{cases} 1 \text{ que no pasa por a} \\ n \text{ que pasan por a} \end{cases}$

$(n+1)$-ciclos: n