Ejercicio 3 Sea G el grafo cuyos vértices son $\{1, 2, \ldots, 15\}$ y tal que i es adyacente al j si y sólo si su máximo común divisor es mayor que 1. Determinar la cantidad de componentes conexas de G.

$G = (V, E)$

G es conexo si dados dos vertices x, y existe un camino de x en y

G no es conexo y tiene dos componentes conexas

sean $x, y \in V$

decimos que xRy si exist un camino de x en y

R es una relación de equivalencia y las clases de equivalencia son las componentes conexas de G

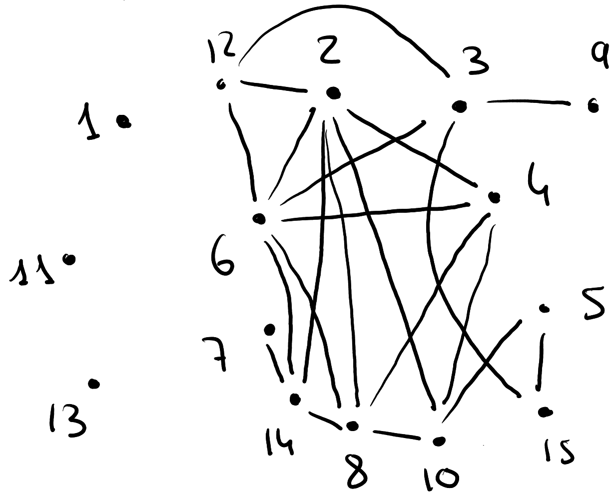
ejercicio 3

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, \ldots, 15\}$

i es adyacente a j sii $mcd(i,j) > 1$

$mcd(1, i) = 1 \Rightarrow 1$ no es adyacente a ningún vertice



faltan aristas

G tiene 4 componentes conexas

Ejercicio 6

(a) Probar que todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas.

(b) Probar que si $G = (V, E)$ es un árbol entonces $|E| = |V| - 1$.

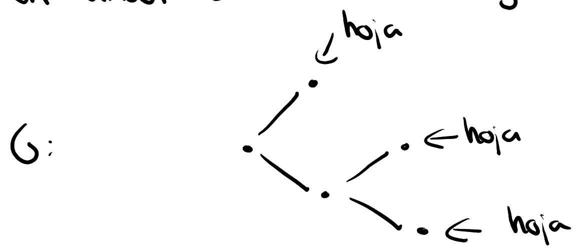
(c) Probar que si $G' = (V', E')$ es un grafo acíclico entonces $|E'| \leq |V'| - 1$.

(d) Probar que si $G^* = (V^*, E^*)$ es un grafo conexo entonces $|E^*| \geq |V^*| - 1$.

(e) Mostrar algún grafo $G = (V, E)$ que no sea un árbol pero que cumpla que $|E| = |V| - 1$.

$G = (V, E)$

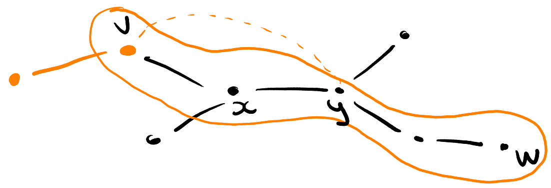
G es un arbol si es conexo y acíclico (no tienen ningún ciclo)



decimos que $v \in V$ es una hoja si sale una sola arista de v

a) Todo arbol con al menos dos vertices tiene al menos dos hojas

2 hojas



4 hojas

consideramos P el camino simple más largo del grafo

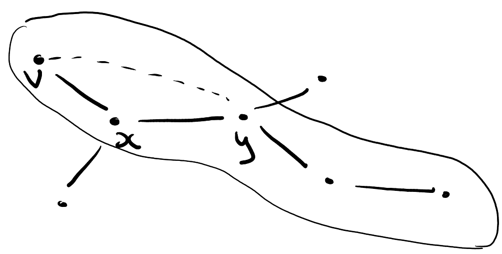
el camino P empieza en un vertice v y termina en un vertice w

veamos que v y w son hojas

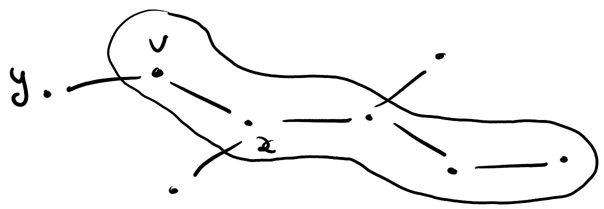
Supongamos que v no es una hoja

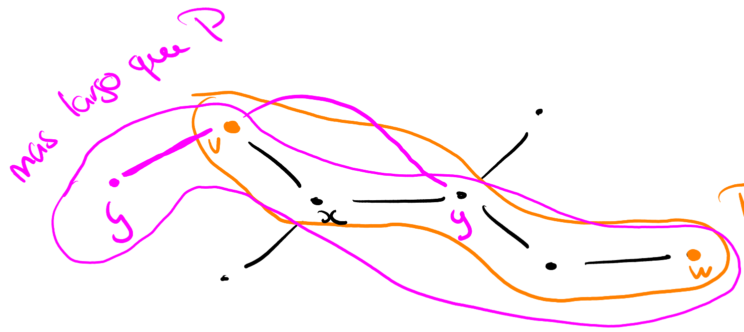
entonces v es adyacente a por lo menos dos vertices x, y

→ uno entre x e y no pertenece al camino porque si no tendríamos un ciclo absurdo por G es un arbol



→ $x \in P$, $y \notin P$





P = camino simple más largo del grafo

v adyacente a x

si suponemos que v no es una hoja entonces tiene que ser adyacente a otro vertice y

→ $y \in P$ → existe un ciclo absurdo!

→ $y \notin P$ → P no es el camino mas largo absurdo!

b) Si $G=(V,E)$ es un arbol entonces $|E|=|V|-1$

Vamos a probarlo por inducción en la cantidad de vertices

CASO BASE:

$n=1$: $G=(V,E)$ con $|V|=1$

G: •

entonces $|E|=0$

y se verifica $\underbrace{|E|}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \underbrace{|V|}_{\overset{\shortparallel}{1}} - 1$

PASO INDUCTIVO:

Hipótesis: Si $G=(V,E)$ es un arbol con $|V|=n$ entonces $|E|=|V|-1=n-1$

Tesis: Si $G'=(V',E')$ es un arbol con $|V|=n+1$ entonces $|E'|=|V'|-1=(n+1)-1=n$

Tenemos $G'=(V',E')$ un arbol con $|V|=n+1$

G' tiene por lo menos dos hojas

sea $G = (V, E)$ el grafo que obtenemos a partir de G' quitándole una hoja

entonces G tiene n vertices y por la hipótesis inductiva

$$|E| = |V| - 1$$

$$|V'| = |V| + 1$$
$$|E'| = |E| + 1$$

$$|E| = |V| - 1$$
$$\Rightarrow |E| + 1 = |V| + 1 - 1$$
$$\Rightarrow |E'| = |V'| - 1 \quad ✓$$

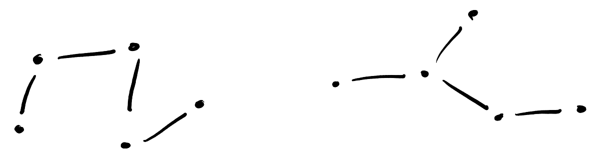
(c) Probar que si $G' = (V', E')$ es un grafo acíclico entonces $|E'| \leq |V'| - 1$.

(d) Probar que si $G^* = (V^*, E^*)$ es un grafo conexo entonces $|E^*| \geq |V^*| - 1$.

(e) Mostrar algún grafo $G = (V, E)$ que no sea un árbol pero que cumpla que $|E| = |V| - 1$.

c) $G' = (V', E')$ grafo acíclico entonces $|E'| \leq |V'| - 1$

G' :



G' acíclico $\Rightarrow$ las componentes conexas de G' son arboles

si $G = (V, E)$ es un arbol entonces $|E| = |V| - 1$

sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_k = (V_k, E_k)$ las componentes conexas de G'

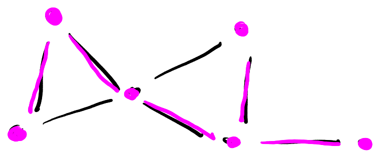
$$|V'| = |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k|$$
$$|E'| = |E_1| + |E_2| + \dots + |E_k|$$

como cada componente es un grafo: $|E_i| = |V_i| - 1$

$$\begin{aligned}|E'| &= |E_1| + |E_2| + \dots + |E_k| \\ &= |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + \dots + |V_k| - 1 \\ &= |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| - k \\ &= |V'| - k \\ &\leq |V'| - 1 \quad \text{porque } k \geq 1\end{aligned}$$

d) si $G^* = (V^*, E^*)$ es conexo entonces $|E^*| \geq |V^*| - 1$

$\ulcorner$ G^* es conexo sii tiene un subgrafo recubridor que es un árbol $\lrcorner$



$G^* = (V^*, E^*)$ es conexo $\Rightarrow$ tiene un subgrafo recubridor $G = (V, E)$ que es un árbol

$|V^*| = |V|$

$|E^*| \geq |E|$

como $G = (V, E)$ es un árbol tenemos $|E| = |V| - 1$

$|E^*| \geq |E| = |V| - 1 = |V^*| - 1$ ✓

e) $|E| = |V| - 1$ no implica que $G = (V, E)$ es un árbol

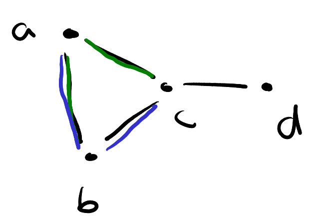
Ejercicio 4 ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con exactamente cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5? Se sabe que el grado máximo de todos los vértices del árbol es igual a 5.

$\ulcorner$ $G = (V, E)$ un grafo

$v \in V$

$gr(v)$ = cantidad de vertices adyacentes a v

= cantidad de aristas que salen de v



$gr(a) = 2$

$gr(b) = 2$

$gr(c) = 3$

$gr(d) = 1$

$gr(a) + gr(b) + gr(c) + gr(d) = 2 \cdot$ cantidad de aristas

$$\boxed{\sum_{v\in V} gr(v) = 2|E|}$$ lema Handshaking

Ejercicio 4 ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con exactamente cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5? Se sabe que el grado máximo de todos los vértices del árbol es igual a 5.

buscamos la cantidad de vertices de grado 1

4 de grado 2
1 de grado 3
2 de grado 4
1 de grado 5
k de grado 1

sea k la cantidad de hojas

* G es un arbol $\Rightarrow |E| = |V| - 1 = 8 + k - 1 = 7 + k$

cantidad de vertices que tienen grado 1

* $\sum_{v\in V} gr(v) = k\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5 = 24 + k$

$\sum_{v\in V} gr(v) = 2|E| \rightarrow 24 + k = 2|E|$

$\Rightarrow |E| = \frac{24+k}{2}$

Entonces $\frac{24+k}{2} = 7 + k \Rightarrow 24 + k = 14 + 2k$

$\Rightarrow \boxed{10 = k}$