Ejercicio 9
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

(a) Hallar los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

(b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

(c) Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

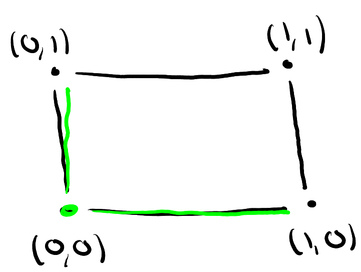
(d) Demostrar que H_n no tiene 3-ciclos.

(e) ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n?

H_n: vertices son las n-uplas de ceros y unos
dos vertices son adyacentes si coinciden en todas las entradas menos exactamente una

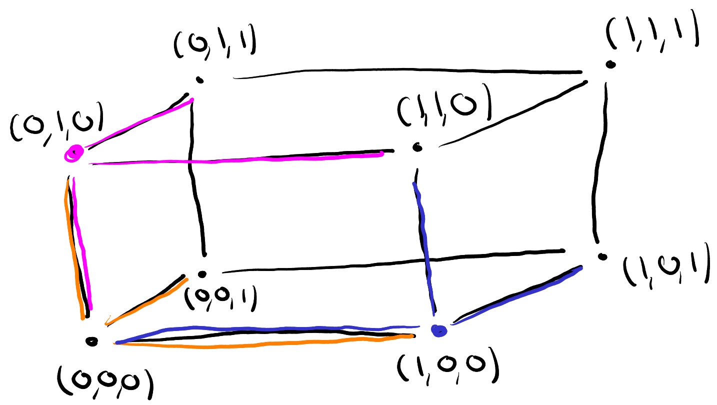
a) H_1:

H_2:



de cada vertice de H_2 salen dos aristas

H_3:



de cada vertice "salen" 3 aristas

$\underbrace{2^3 \cdot 3}$

↑ aca contamos cada arista dos veces

b) * cantidad de vertices de H_n

$$\underbrace{(\underset{\downarrow}{\overset{2\text{ pos.}}{\_}}, \underset{\downarrow}{\overset{2\text{ pos.}}{\_}}, \underset{\downarrow}{\overset{2\text{ pos.}}{\_}}, \dots, \underset{\downarrow}{\overset{2\text{ pos.}}{\_}})}_{n \text{ entradas}}$$

por la regla del producto hay 2^n vertices

* cantidad de aristas de H_n

un vertice de H_n es adyacente con n vertices

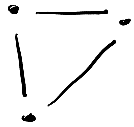
$$\frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} n \text{ aristas}$$

c) dos caminos simples en H_5 de $(0,0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1,0)$

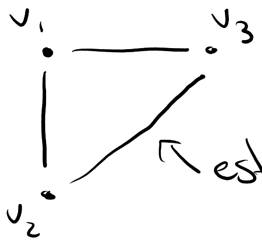
$(0,0,1,1,0)$ — $(0,0,0,1,0)$

$(0,0,1,1,0)$ — $(1,0,1,1,0)$ — $(1,0,0,1,0)$ — $(0,0,0,1,0)$

d) demostrar que en H_n no hay 3-ciclos

3-ciclo :  (ciclo con 3 vertices)

Supongamos que hay un 3-ciclo en H_n



esta arista no existe

v_1 y v_2 adyacentes $\Rightarrow$ coinciden en todas las entradas menos en la i-ésima entrada

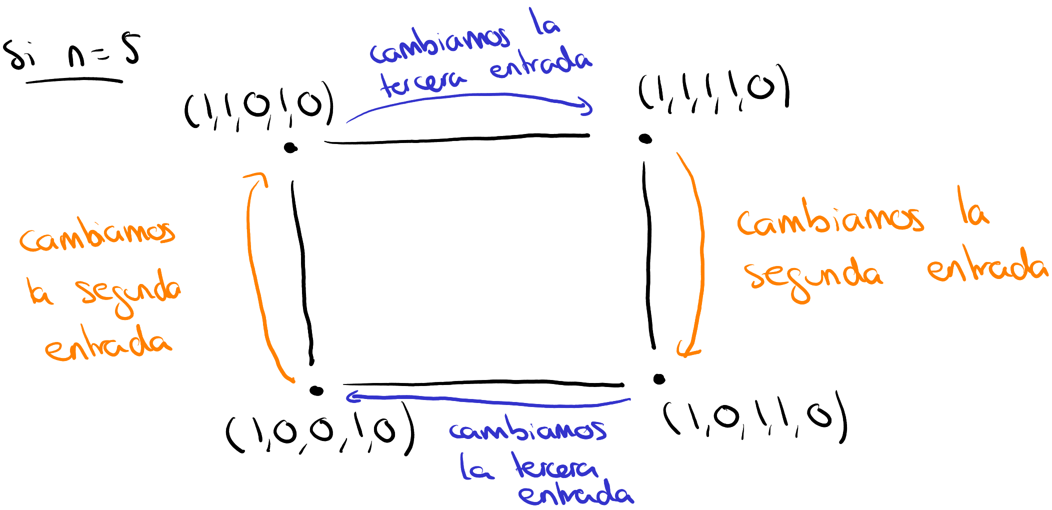
v_1 y v_3 adyacentes $\Rightarrow$ coinciden en todas las entradas menos en la j-ésima entrada $i \neq j$

Entonces los vertices v_2 y v_3 difieren en dos entradas, la i-ésima y la j-ésima.

$\Rightarrow$ v_2 y v_3 no son adyacentes

e) cuántos 4-ciclos tiene H_n?

Si n=5



$$2^5 \cdot 5 \cdot 4$$

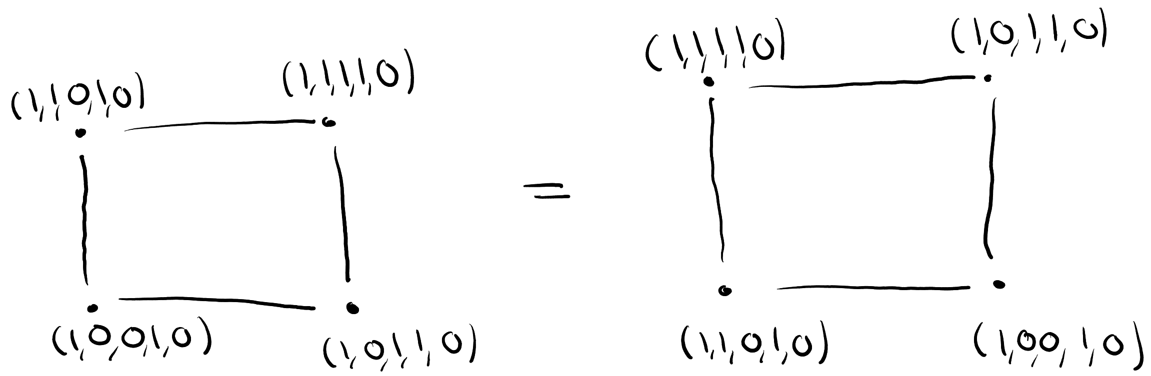
posibilidades para la segunda entrada que cambiamos

posibilidades para el "primer vertice"

posibilidades para la primer entrada que cambiamos

estamos contando de más:

* no importa la orientación: cambiar la entrada i y después la entrada j es lo mismo que cambiar la entrada j y después la entrada
* no importa cual es el primer vertice



Entonces la cantidad de 4-ciclos en H_5 es

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = C^5_2$$

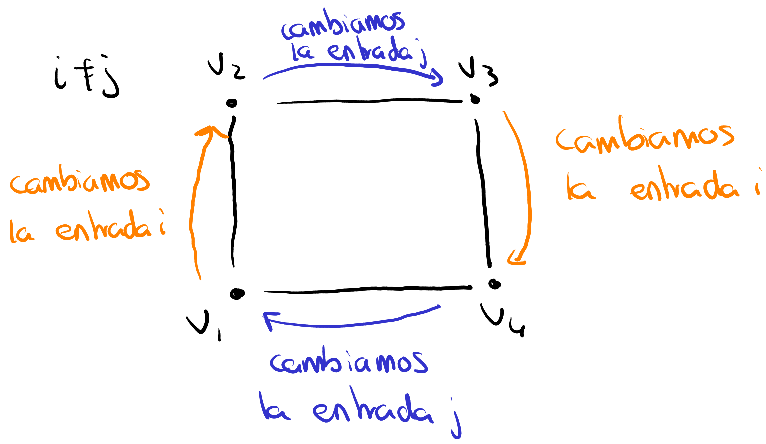
$$\frac{2^5 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 2} = \frac{2^5}{4} C^5_2 = 2^3 C^5_2$$

no importa quien es el primer vertice

no importa la orientación

cantidad de 4-ciclos en H_n:

$i \neq j$



$$\frac{2^n C^n_2}{4} = 2^{n-2} C^n_2$$

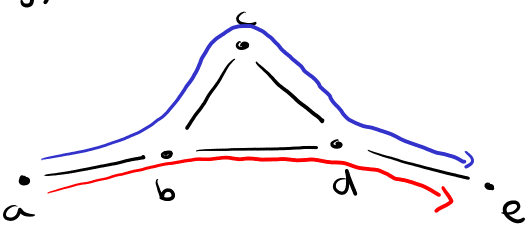
Ejercicio 2 Hallar el diámetro de los grafos K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen.

$G=(V,E)$ un grafo conexo

sean $x, y \in V$

$dist(x,y)$ = largo del camino más corto de x a y

G:



$d(a,e) = 3$ $\qquad$ $diam(G) = 3$

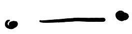
$d(a,d) = 2$

$diam(G)$ = la mayor de las distancias entre los vertices.

* el grafo completo K_n

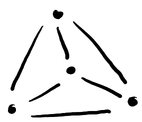
K_n = n vertices todos adyacentes entre si

K_2:



K_3:

K_4:



sean x, y vertices de K_n

$\Rightarrow$ x, y son adyacentes

$\Rightarrow$ $d(x,y) = 1$

entonces el diametro de K_n es 1

* el grafo completo bipartito $K_{n,m}$

$K_{n,m} = (V, E)$

$|V| = n+m$, $V = A \cup B$ con $|A| = n$ y $|B| = m$

los vertices de A son adyacentes con todos los vertices de B y estas son las unicas adyacencias

$K_{2,3}$:

sean x, y vertices de $K_{n,m}$

* si $x \in A$, $y \in B$

  $\Rightarrow x, y$ son adyacentes

  $\Rightarrow d(x,y) = 1$

* si $x \in A$, $y \in A$

  $\Rightarrow x, y$ no son adyacentes

  $\Rightarrow d(x,y) > 1$

  si $z \in B$, xzy es un camino de x en y

  $\Rightarrow d(x,y) = 2$

* si $x \in B$, $y \in B$

  $d(x,y) = 2$

Entonces $\operatorname{diam}(K_{n,m}) = 2$

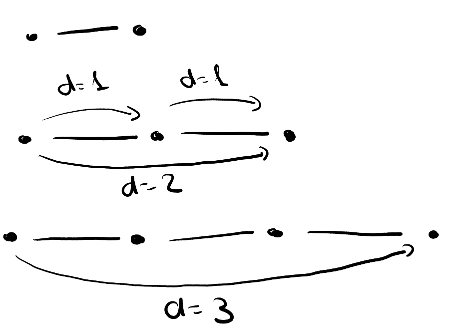
* el camino simple P_n

  P_n = camino simple con n vertices

P_2 :

P_3 :

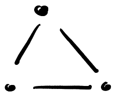
P_4 :



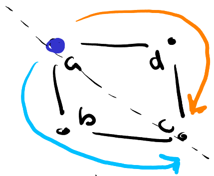
$\operatorname{diam}(P_n) = n-1$ (el primer y el último vertice están a distancia $n-1$)

* el ciclo C_n

C_n = ciclo con n vertices

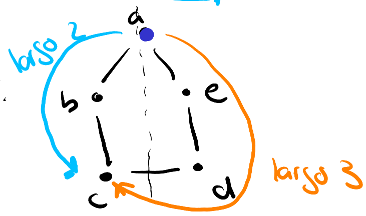
C_3 : 

$\operatorname{diam}(C_3) = 1$

C_4 : 

$d(a,b) = 1$
$d(a,d) = 1$
$d(a,c) = 2$

$\operatorname{diam}(C_4) = 2$

C_5 : 

$d(a,b) = 1 \qquad d(a,c) = 2$
$d(a,e) = 1 \qquad d(a,d) = 2$

$\operatorname{diam}(C_5) = 2$

$$\operatorname{diam}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$ ← redondeado para abajo / truncado / piso