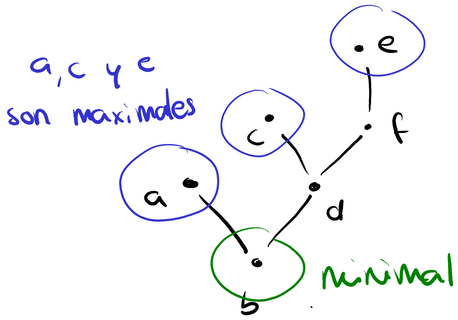
$\leq$ relación de orden en un conjunto A

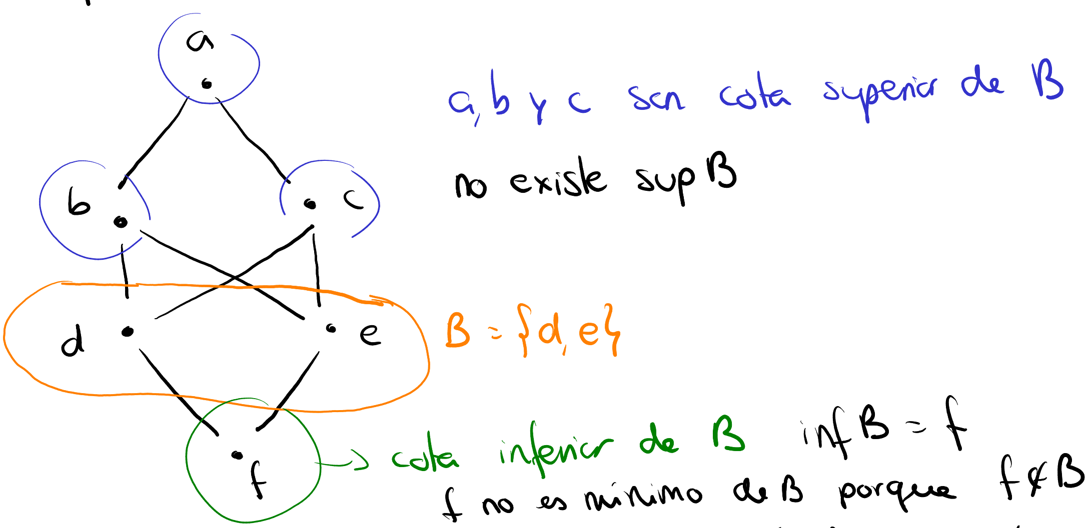
* $x \in A$ es maximal si no existe $a \in A$ tal que $x \leq a$, $a \neq x$



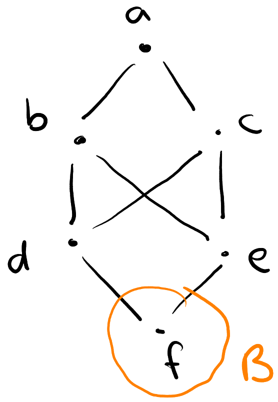
* $x \in A$ es minimal si no existe $a \in A$ tal que $a \leq x$, $a \neq x$

Sea $B \subseteq A$

* $x \in A$ es cota superior de B si para todo $x' \in B$ se cumple $x' \leq x$



* $x \in A$ es cota inferior de B si para todo $x' \in B$ se cumple $x \leq x'$
* x es supremo de B si es cota superior y si x' es otra cota superior de B entonces $x \leq x'$
* x es ínfimo de B si es cota inferior de B y si x' es otra cota inferior de B entonces $x' \leq x$
* x es maximo de B si $x = \sup B$ y además $x \in B$
* x es minimo de B si $x = \inf B$ y además $x \in B$



cotas superiores de $\{f\}$: $a, b, c, d, e, \underline{f}$

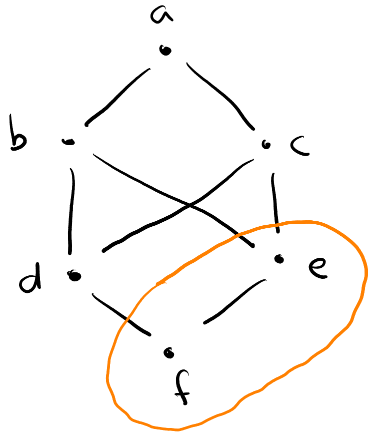
$\sup\{f\} = f$

f es el máximo de $\{f\}$

cotas inferiores de $\{f\}$: f

$\inf\{f\} = f$

f es el mínimo de $\{f\}$



cotas superiores de $\{e, f\}$: e, c, b, a

$\sup\{e, f\} = e$

$\max\{e, f\} = e$

$\min\{e, f\} = f$

Ejercicio 13 Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

orden total:

$(A, \leq)$ es un orden total si para todos $x, y \in A$ se cumple que

$x \leq y$ o $y \leq x$.

el diagrama de Hasse es de la forma

buen orden

$(A, \leq)$ es un buen orden si todo subconjunto de A tiene mínimo.

a) si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces $(A, \leq)$ es un orden total.

tomamos $x, y \in A$

queremos ver que se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$

como $(A, \leq)$ es un buen orden el subconjunto $\{x, y\}$ tiene mínimo.

tenemos dos casos:

① $\min\{x, y\} = x$

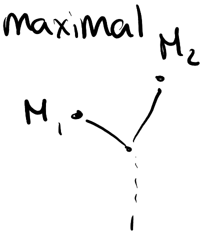
entonces $x \leq y$

② $\min\{x, y\} = y$

entonces $y \leq x$

Entonces $(A, \leq)$ es un orden total.

b) Si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal



$M_1 \not\leq M_2$ ←

$M_2 \not\leq M_1$ ←

Supongamos que $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales M_1 y M_2

* no se cumple que $M_1 \leq M_2$ porque M_1 es maximal
* no se cumple que $M_2 \leq M_1$ porque M_2 es maximal

Entonces tenemos dos elementos que no se pueden comparar

$\Rightarrow (A, \leq)$ no es un orden total

Absurdo!

c) Si $(A, \leq)$ tiene dos maximales distintos entonces no es un buen orden

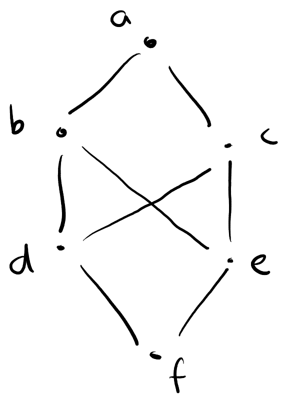
[a) $(A, \leq)$ buen orden $\Rightarrow (A, \leq)$ orden total

b) $(A, \leq)$ orden total $\Rightarrow (A, \leq)$ tiene a lo sumo un maximal]

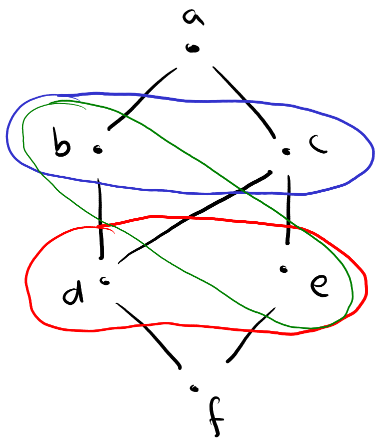
$(A, \leq)$ tiene dos maximales distintos $\Rightarrow (A, \leq)$ no es orden total

$\Rightarrow (A, \leq)$ no es un buen orden

$(A, \leq)$ es un retículo si para todo $x, y \in A$ el conjunto $\{x, y\}$ tiene ínfimo y supremo.



no es un retículo porque $\{d, e\}$ no tiene supremo



$\sup\{b, c\} = a$
$\inf\{b, c\} = d$

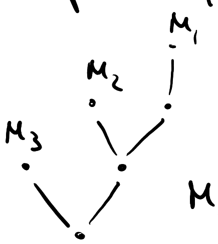
$\sup\{d, e\} = c$
$\inf\{d, e\} = f$

$\sup\{b, e\} = a$
$\inf\{b, e\} = f$

es retículo

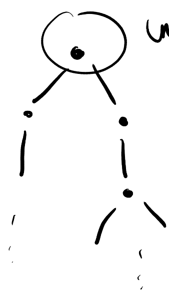
Ejercicio 14 Probar que si $(A, \leq)$ es un retículo y A es finito y no vacío entonces A tiene máximo y mínimo.

Vamos a probar que A tiene máximo. (M es maximo de A si $x \leq M$ para todo $x \in A$)



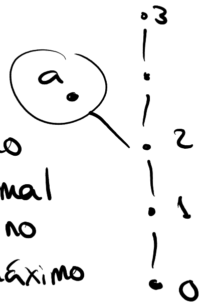
M_1 no es maximo porque $M_2 \not\leq M_1$

* si A tiene dos maximales distintos $\Rightarrow$ A no tiene máximo.



unico maximal y máximo

unico maximal pero no es máximo



* si A es finito y tiene un unico maximal entonces el maximal es maximo

Para probar que A tiene máximo vamos a probar que tiene un único máximal (esto alcanza porque A es finito)

① A tiene un maximal

Sea $a_1 \in A$

si a_1 es maximal ✓

si a_1 no es maximal existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 \leq a_2$

si a_2 es maximal ✓

si a_2 no es maximal existe $a_3 \in A$ tal que $a_2 \leq a_3$

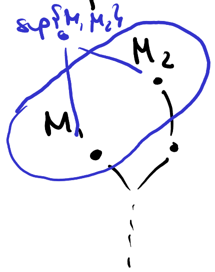
como A es finito este proceso se termina después de una cantidad finita de pasos y obtenemos

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$$

entonces a_n es maximal

② A tiene un único máximal

Supongamos que A tiene dos elementos maximales distintos M_1 y M_2



Consideramos $\{M_1, M_2\}$

Forma 1: $\{M_1, M_2\}$ no tiene cotas superiores, por lo tanto no tiene supremo y esto contradice que A sea un retículo

Forma 2: Como A es un retículo existe $a = \sup\{M_1, M_2\}$

* $a \neq M_1$ porque M_1 no es cota superior de $\{M_1, M_2\}$ y por lo tanto no puede ser supremo
* $M_1 \leq a$

y esto contradice que M_1 es maximal