Ejercicio 9 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\overbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}^{=A}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Forma 1:

caso 1: una clase con 4 elementos y dos clases con un solo elemento

$$A/R = \{ \overbrace{\{2,4,5,6\}}^{[2]}, \overbrace{\{1\}}^{[1]}, \overbrace{\{3\}}^{[3]} \}$$

hay que elegir los cuatro elementos que estén en la clase que tiene cuatro elementos

$\Rightarrow C^6_4$ relaciones de equivalencia

$$A/R = \{ \{2,4,5,6\}, \{1\}, \{3\}\}$$

2R2, 2R4, 2R5, 2R6 1R1 3R3
4R2, 4R4, 4R5, 4R6
5R2, 5R4, 5R5, 5R6
6R2, 6R4, 6R5, 6R6

$$\frac{C^6_4 \cdot \overbrace{C^2_1 \cdot C^1_1}}{2!}$$

caso 2: una clase con 3 elementos, una clase con 2 elementos y una clase con 1 elemento

$$A/R = \{ \{\ ,\ ,\ \}, \{\ ,\ \}, \{\ \}\}$$

$\Rightarrow C^6_3 \cdot C^3_2$ relaciones de equivalencia

caso 3: las tres clases tienen dos elementos

$$A/R = \{ \{5,6\}, \{1,3\}, \{2,4\}\} = \{ \{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}\}$$

$$\frac{C^6_2 \cdot C^4_2}{3!}$$

Por la regla de la suma hay

$$C^6_4 + C^6_3 \cdot C^3_2 + \frac{C^6_2 \cdot C^4_2}{3!} =$$

Forma 2: (con el número de Stirling)

$S(n,m)$ = cantidad de formas de dividir un conjunto con n elementos en m conjuntitos

$$= \frac{1}{m!} \operatorname{Sob}(n,m)$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \, C_i^m (m-i)^n$$

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$

cantidad de relaciones de equivalencia que tienen 3 clases de equivalencia $= S(6,3)$

$$S(6,3) = \frac{1}{3!}\left(C_0^3 \, 3^6 - C_1^3 \, 2^6 + C_2^3 \, 1^6 - C_3^3 \, 0^6 \right)$$

$$= \frac{1}{3!}\left(3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 \right)$$

Relaciones de orden

A un conjunto

decimos que una relación R sobre A es de orden si:

* R es reflexiva: xRx para todo $x \in A$
* R es antisimétrica: xRy y $yRx \Rightarrow x = y$
* R es transitiva: xRy, $yRz \Rightarrow xRz$

ejemplo: $\leq$ en $\mathbb{R}$

$x \leq x$ ✓

$x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$ ✓

$x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ✓

diagrama de Hasse:

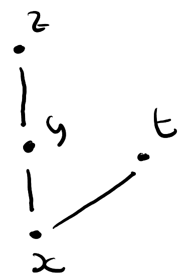
$A = \{x, y, z, t\}$

$x \leq y$

$x \leq t$

$\rightarrow x \leq z$

$y \leq z$



Ejercicio 10 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$

$x \leq y$ sii y es multiplo de x.

* $\leq$ es relación de orden

① reflexiva: sea $x \in A$

$x = 1 \cdot x \Rightarrow x$ es multiplo de $x \Rightarrow x \leq x$

② antisimétrica: sean $x, y \in A$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$

queremos ver que $y = x$

$x \leq y \Rightarrow y = qx$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$y \leq x \Rightarrow x = q'y$ para algún $q' \in \mathbb{Z}$

entonces $y = qx = qq'y \Rightarrow qq' = 1 \rightarrow q = q' = 1$

$\rightarrow q = q' = -1$ X porque los elementos de A son positivos entonces $q = q' = 1$

$\Rightarrow y = x$ ✓

(3) transitiva: sean $x, y, z \in A$ tales que $x \leq y$, $y \leq z$

y múltiplo de x   z múltiplo de y

queremos ver que $x \leq z$ z es múltiplo de x?

$x \leq y \Rightarrow y = qx$ para algún $q \in \mathbb{Z}^+$

$y \leq z \Rightarrow z = q'y$ para algún $q' \in \mathbb{Z}^+$

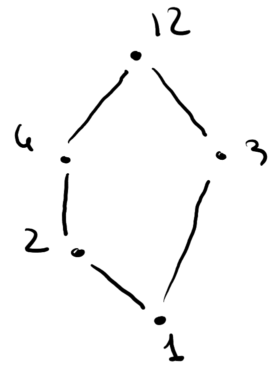
$z = q'y = \underbrace{q'q}_{\in \mathbb{Z}^+} x \Rightarrow z$ es múltiplo de x ✓

* diagrama de Hasse

$A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$

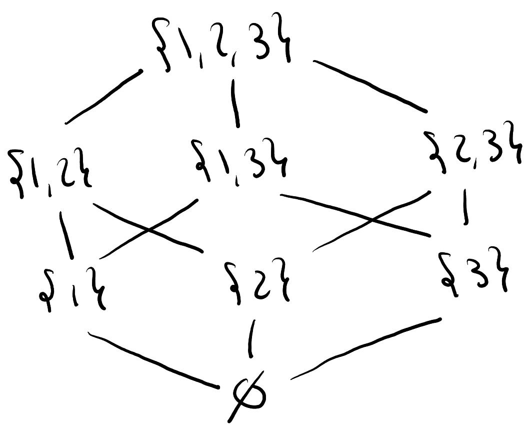
$x \leq y$ sii y es múltiplo de x

$1 \leq 1$	$2 \leq 2$	$3 \leq 3$	$4 \leq 4$	$12 \leq 12$
$1 \leq 2$	$2 \leq 4$	$3 \leq 12$	$4 \leq 12$	
$1 \leq 3$	$2 \leq 12$			
$1 \leq 4$				
$1 \leq 12$				



(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$



Ejercicio 12 Calcular la cantidad de relaciones de orden definidas en $\{1, 2, 3\}$.

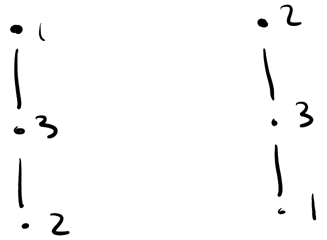
caso 1: el diagrama de Hasse tiene la forma

← 3 posibilidades

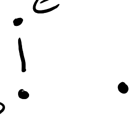
← 2 posibilidades

← 1 posibilidad

$3 \cdot 2 = 6$ relaciones de orden



caso 2: el diagrama de Hasse tiene la forma



← 3 posibilidades

→ 2 posibilidades

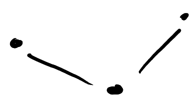
← 1 posibilidad

$3 \cdot 2 = 6$ relaciones de orden

caso 3: diagrama de forma

⇝ 1 relación de orden

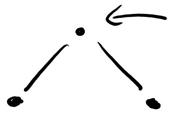
caso 4: diagrama de forma



← elegir quien va acá

⇝ 3 relaciones de orden

caso 5: diagrama de forma



← elegir quien va acá

⇝ 3 relaciones de orden

por la regla de la suma hay:

$6 + 6 + 1 + 3 + 3 = 19$ relaciones de orden