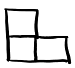
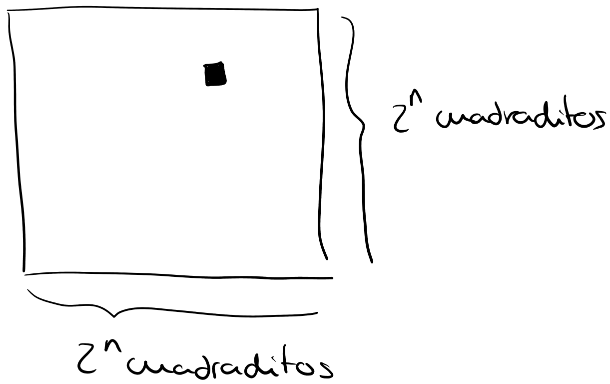
PRACTICO 1

Ejercicio 5
Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

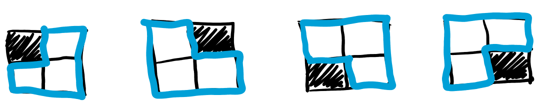


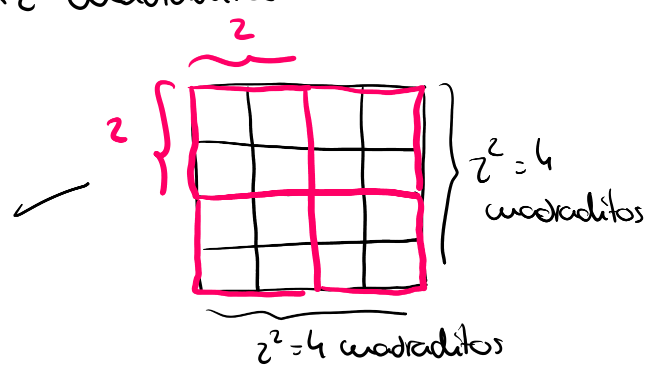


$P(n)$: una tablero compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito se puede cubrir con piezas en forma de L 

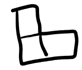
Vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo natural $n \geq 1$

Caso base: consideramos un tablero de $2^1 \times 2^1$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito

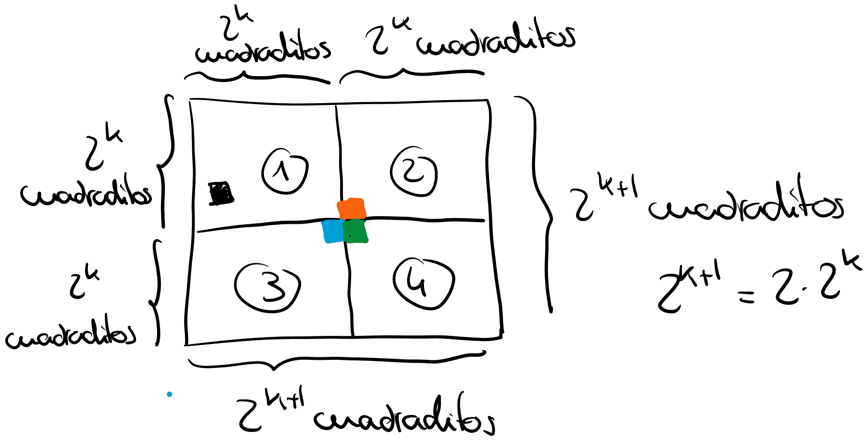




Paso inductivo

* hipótesis inductiva: si tenemos un tablero $2^k \times 2^k$ al cual le falta un cuadradito entonces podemos cubrir el tablero con piezas en forma de L 

* tesis inductiva: si tenemos un tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ al cual le falta un cuadradito, entonces podemos cubrir el tablero con piezas en forma 



Sin pérdida de generalidad suponemos que el cuadradito que falta está en 1

* 1 es un tablero $2^k \times 2^k$ al cual le falta un cuadradito entonces por hipótesis inductiva lo podemos cubrir con piezas en forma de ⊞
* por HI podemos cubrir el tablero 2 menos el cuadradito
* por HI podemos cubrir el tablero 3 menos el cuadradito
* por HI podemos cubrir el tablero 4 menos el cuadradito
* los tres cuadraditos coloreados los cubrimos con una pieza en forma de ⊞

Inducción fuerte

Sea $P(n)$ una propiedad sobre un natural n

una demostración de que $P(n)$ vale para todo natural por inducción fuerte tiene dos etapas

1. Caso base:
   verificamos que se cumple $P(0), P(1), P(2), \dots, P(i)$

2. Paso inductivo
   * Hipótesis inductiva: suponemos que se cumplen $P(k), P(k-1), \dots, P(k-i)$
   * Tesis inductiva: probamos que se cumple $P(k+1)$

$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3} \quad n \geq 4 \quad \rightarrow a_4 = 2a_3 + 7a_2 + a_1$

Ejercicio 6
Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \; \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \; \forall n \geq 1$.

$a_1 = 3$

$a_2 = 10$

$a_3 = 30$

$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \quad n \geq 1$

$a_4 = 2a_3 + 7a_2 + a_1$

$a_5 = 2a_4 + 7a_3 + a_2$

$P(n): \; a_n \geq 3^n$

Vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo natural $n \geq 1$

<u>Caso base</u>: vamos a probar 3 casos base:

* si $n=1$: $a_1 = 3 \geq 3^1$ ✓
* si $n=2$: $a_2 = 10 \geq 9 = 3^2$ ✓
* si $n=3$: $a_3 = 30 \geq 27 = 3^3$ ✓

<u>Paso inductivo</u>: suponemos que la propiedad vale para k, $k+1$ y $k+2$ y probamos que vale para $k+3$

* <u>Hipótesis inductiva</u>:
  * $a_k \geq 3^k$ para $k \geq 1$
  * $a_{k+1} \geq 3^{k+1}$
  * $a_{k+2} \geq 3^{k+2}$

* queremos probar que $a_{k+3} \geq 3^{k+3}$

$$a_{k+3} = \underbrace{2a_{k+2}}_{\substack{\geq 3^{k+2} \\ \text{por HI}}} + \underbrace{7a_{k+1}}_{\substack{\geq 3^{k+1} \\ \text{por HI}}} + \underbrace{a_k}_{\substack{\geq 3^k \\ \text{por HI}}} \geq 2 \cdot 3^{k+2} + 7 \cdot 3^{k+1} + 3^k$$

$a_{k+2} \geq 3^{k+2}$ $\quad$ $a_{k+1} \geq 3^{k+1}$ $\quad$ $a_k \geq 3^k$

$2 \cdot a_{k+2} \geq 2 \cdot 3^{k+2}$ $\quad$ $7 \cdot a_{k+1} \geq 7 \cdot 3^{k+1}$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot a_{k+2} \geq 2 \cdot 3^{k+2} \\ 7 \cdot a_{k+1} \geq 7 \cdot 3^{k+1} \\ a_k \geq 3^k \\ \hline 2 \cdot a_{k+2} + 7a_{k+1} + a_k \geq 2 \cdot 3^{k+2} + 7 \cdot 3^{k+1} + 3^k \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{k+3} \geq 2 \cdot 3^{k+2} + 7 \cdot 3^{k+1} + 3^k &= 2 \cdot 3^2 \cdot 3^k + 7 \cdot 3 \cdot 3^k + 3^k \\ &= 3^k (2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 1) \\ &= 3^k \cdot (18 + 21 + 1) \end{aligned}$$

$= 3^k \cdot 40$

$\geqslant 3^k \cdot 27$

$= 3^k \cdot 3^3$

$= 3^{k+3}$

Entonces $a_{k+3} \geqslant 3^{k+3}$

$a_{k+3} \geq 3^k \cdot 40 \geqslant 3^k \cdot 27 = 3^{k+3}$

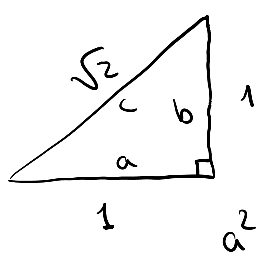
queremos $a_{k+3} \geq 3^{k+3} = 3^k \cdot 3^3 = 3^k \cdot 27$

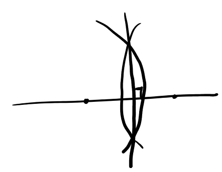
$a_{k+3} \geqslant 3^k \cdot 27$

Ejercicio 7
Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$.

$P(n)$: es posible construir un segmento de longitud $\sqrt{n}$ con regla y compás a partir de un segmento de longitud 1

$\underline{n=2}$:



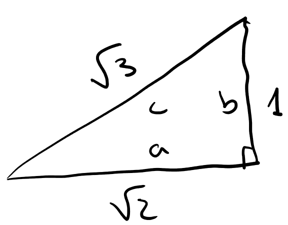


$a^2 + b^2 = c^2$

$1 + 1 = c^2$

$\Rightarrow c = \sqrt{2}$

$\underline{n=3}$:



$a^2 + b^2 = c^2$

$2 + 1 = c^2$

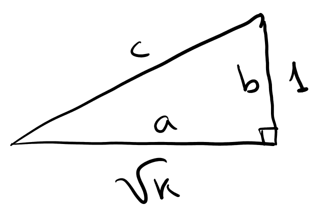
$\Rightarrow c = \sqrt{3}$

Caso base:

segmento de longitud 1 ✓

Paso inductivo:

* hipótesis: podemos constrir un segmento de longitud $\sqrt{k}$
* queremos constrir un segmento de longitud $\sqrt{k+1}$



por Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$k + 1 = c^2$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{k+1}$$ ✓

Ejercicio 8

Probar que todo número natural mayor que 1 se descompone en factores primos.

$P(n)$: n se descompone en factores primos

vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo natural ≥ 2 por inducción (muy) fuerte

Caso base:

2 es un número primo entonces se descompone en factores primos

Paso inductivo: suponemos que $P(2), P(3), P(4), \ldots, P(k)$ se cumplen y probamos que $P(k+1)$ se cumple

* hipótesis inductiva: si $1 < m \leq k$ entonces m se descompone en factores primos

* queremos ver que $k+1$ se descompone en factores primos

① si $k+1$ es primo ✓

② si $k+1$ no es primo tiene un divisor a tq $a \neq 1$ y $a \neq k+1$ $\quad 1 < a < k+1$

$k+1 = ab$ con $1 < a \leq k$ y $1 < b \leq k$

por HI, a y b se descomponen en factores primos

$\Rightarrow k+1$ se descompone en factores primos