Ejercicio 5
En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

b) $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb si $a-b$ es un número par

* R relación de equivalencia

① reflexiva: $a \in \mathbb{Z}$

$a - a = 0$ que es un número par

$\Rightarrow aRa$

② simétrica: sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\underbrace{aRb}^{a-b \text{ es par}}$

queremos probar que $\underbrace{bRa}_{b-a \text{ es par?}}$

$aRb \Rightarrow a-b$ es un número par

$\Rightarrow a - b = 2n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b - a = 2(-n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b-a$ es un número par

$\Rightarrow bRa$

③ transitiva: sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $\overbrace{aRb}^{a-b \text{ es par}}$ y $\overbrace{bRc}^{b-c \text{ es par}}$

queremos ver que $\underbrace{aRc}_{a-c \text{ es par?}}$

$aRb \Rightarrow a-b$ es un número par

$\Rightarrow a-b = 2n_1$ para algún entero n_1

$bRc \Rightarrow b-c$ es un número par

$\Rightarrow b - c = 2n_2$ para algún entero n_2

$a - c = (a-b) + (b-c) = 2n_1 + 2n_2 = 2\underbrace{(n_1+n_2)}_{\in \mathbb{Z}}$ es par

$\Rightarrow aRc$

* clases de equivalencia

$[0] = \{b \in \mathbb{Z} : bR0\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b-0 \text{ es un número par}\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es un número par}\}$

$[4] = \{b \in \mathbb{Z} : bR4\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b-4 \text{ es un número par}\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es par}\}$

$b-4$ par $\Rightarrow$ $b-4 = 2n$ para algún n

$\Rightarrow$ $b = 2n+4$ para algún n

$\Rightarrow$ $b = 2(n+2)$ para algún n

$[0] = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\} = [4] = [100]$

$[1] = \{b \in \mathbb{Z} : bR1\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b-1 \text{ es un número par}\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b-1 = 2n \text{ para algún } n\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b = 2n+1 \text{ para algún } n\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ impar}\}$

$[0] = \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es par}\}$

$[1] = \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es impar}\}$

* conjunto cociente

$\mathbb{Z}/_R = \{[0], [1]\}$

$= \{\{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es par}\}, \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ es impar}\}\}$

d) $v, w \in \mathbb{R}^2$

vRw si existe $\underbrace{a}_{\text{a no nulo}} \in \mathbb{R}$ tal que $w = av$

* R es una relación de equivalencia

(1) reflexiva: sea $v \in \mathbb{R}^2$

$v = 1v \Rightarrow v\mathcal{R}v$

② simétrica: sean $v, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\overbrace{v\mathcal{R}w}^{w = av}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

queremos ver que $\underbrace{w\mathcal{R}v}_{v = a'w\,?}$

$v\mathcal{R}w \Rightarrow w = av \quad , a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \frac{1}{a} w = v \quad$ y $\frac{1}{a} \neq 0$

$\Rightarrow v = \frac{1}{a} w \quad , \frac{1}{a} \neq 0$

$\Rightarrow w\mathcal{R}v$

③ transitiva: sean $v, w, u \in \mathbb{R}^2$ tales que $\overbrace{v\mathcal{R}w}^{w = av}$, $\overbrace{w\mathcal{R}u}^{u = a'w}$ $\quad a \neq 0$, $a' \neq 0$

queremos ver que $\underbrace{v\mathcal{R}u}_{u = a''v\,?}$

$v\mathcal{R}w \Rightarrow w = av$ con $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$w\mathcal{R}u \Rightarrow u = a'w$ con $a' \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$u = a'\underline{w} = \underbrace{a'a}_{a''}v \quad , a'a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

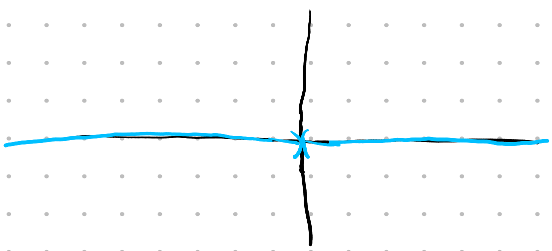
$\Rightarrow v\mathcal{R}u$

* clases de equivalencia:

$[(1,0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1,0)\,\mathcal{R}\,(x,y)\}$

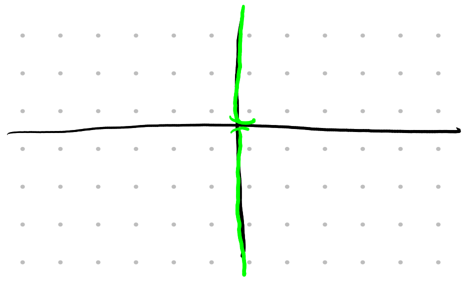
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(1,0)$ para algún $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (a,0)$ para algún $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$



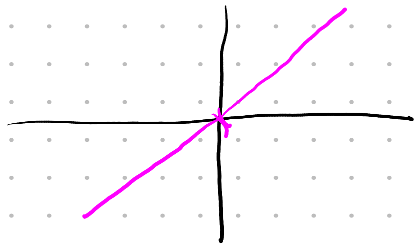
$[(1,0)] =$ recta generada por $(1,0)$ menos el origen

$$[(0,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0,1) \mathcal{R} (x,y)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(0,1) \ , a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$



$[(0,1)]$ = recta generada por $(0,1)$ menos el origen

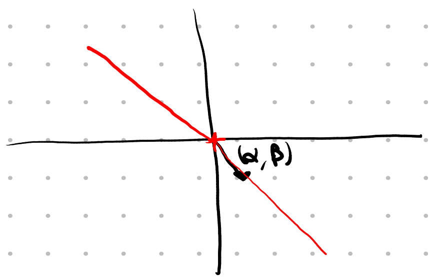
$$[(1,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1,1) \mathcal{R} (x,y)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(1,1) \ , a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (a,a) \ , a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$



$[(1,1)]$ = recta generada por $(1,1)$ menos el origen

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$[(\alpha,\beta)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\alpha,\beta) \mathcal{R} (x,y)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = a(\alpha,\beta) \ , a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$
= recta generada por (α,β) menos el origen



* conjunto cociente

$$\mathbb{R}^2/_{\mathcal{R}} = \{\text{rectas por el origen menos el origen}\}$$

Ejercicio 6
Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Hay que ver que R es reflexiva

sea $a \in A$

queremos ver que aRa

existe $b \in A$ tal que aRb

como R es simétrica tenemos bRa

$$\left.\begin{array}{l} aRb \\ bRa \\ R \text{ transitiva} \end{array}\right\} \Rightarrow aRa$$

entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva y por lo tanto R es relación de equivalencia.

Ejercicio 8 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

$A = \{1, 2, 3\}$

CASO 1 : hay una sola clase de equivalencia

$|A/R| = 1$

$[1] = [2] = [3] = \{1, 2, 3\}$ 1 relación

$1R1, 1R2, 1R3$ $3R1, 3R2, 3R3$
$2R2, 2R1, 2R3$

CASO 2: hay dos clases de equivalencia

$|A/R| = 2$

dos clases de equivalencia $\Rightarrow$ hay una clase que tiene dos elementos y la otra tiene un solo elemento

$A/R = \{\{\ ,\ \}, \{\ \}\}$ hay que elegir los dos elementos que estén en la clase con dos elementos

C^3_2 relaciones

CASO 3: hay 3 clases de equivalencia

$|A/R| = 3$

$[1] = \{1\}$ $[2] = \{2\}$ $[3] = \{3\}$

$$\left\{\begin{array}{l} 1R1 \\ 2R2 \\ 3R3 \end{array}\right.$$

1 relación

por la regla de la suma hay

$1 + C^3_2 + 1 = 5$ relaciones

Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas*.

b) R y S simétricas

* $\overline{R}$ simétrica?

$a \overline{R} b \iff a \not R b$

sean $a, b \in A$ tales que $\overbrace{a \overline{R} b}^{a \not R b}$

queremos probar que $\underbrace{b \overline{R} a}_{b \not R a ?}$

$a \overline{R} b \Rightarrow a \not R b \underset{R \text{ simétrica}}{\Longrightarrow} b \not R a \Rightarrow b \overline{R} a$

si $b R a \Longrightarrow a R b$

* R^{-1} simétrica ?

$a R^{-1} b \iff b R a$

sean $a, b \in A$ tales que $a R^{-1} b$

$a R^{-1} b \Rightarrow b R a \underset{R \text{ simétrica}}{\Longrightarrow} a R b \Rightarrow b R^{-1} a$

* $R \circ S$

$a R \circ S\, b \iff$ existe $c \in A$ tal que $a R c$ y $c S b$

sean $a, b \in A$ tal que $a R \circ S b$

$\Rightarrow$ existe $c \in A$ tal que $\overbrace{a R c}^{c R a}$ y $\overbrace{c S b}^{b S c}$

$b R \circ S a$? buscamos d tal que $b R d$ y $d S a$

contraejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,2), (1,3)\}$

$S = \{(2,3)\}$

$1R2$ y $2S3 \Rightarrow 1 \, R \circ S \, 3$ pero $3 \, \cancel{R \circ S} \, 1$