simétrica

$\underbrace{x R y}$ $\Rightarrow$ $y R x$

Ejercicio 2

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

2 pos

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline & 1 & 2pos & 2pos \\ 1 & 2pos & 2pos & 2pos \\ & & 1 & 2pos \\ & & & 2pos \end{array}$$

Por la regla del producto hay 2^8 relaciones

Ejercicio 4
¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

A conjunto con n elementos.

* cantidad de relaciones reflexivas

$$M = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}^{n \text{ columnas}} \Big\} n \text{ filas}$$

tiene dos posibilidades: 0 y 1

2 posibilidades: 0 y 1

cantidad de entradas fuera de la diagonal: $n^2 - n$

por la regla del producto hay

2^{n^2-n} relaciones reflexivas

* cantidad de relaciones simétricas en A

2 pos

$$M = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \cdots & \circ \\ & \ddots & & \circ\circ \\ & & \circ & \circ \\ & & & \circ \end{pmatrix}$$

2 posibilidades para la entrada i,j : 0 y 1

si $m_{ij} = 1 \Rightarrow i R j \Rightarrow j R i \Rightarrow m_{ji} = 1$

si $m_{ij} = 0 \Rightarrow i \not R j \Rightarrow j \not R i \Rightarrow m_{ji} = 0$

2 pos

cantidad de entradas en la diagonal: n

cantidad de entradas en el triangulo superior: $\frac{n^2 - n}{2}$

Por la regla del producto hay

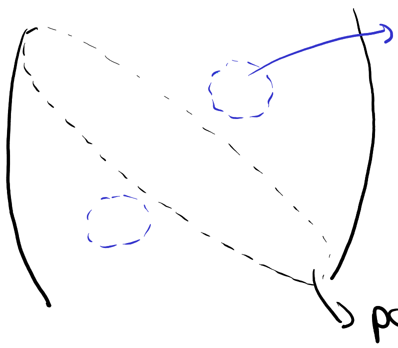
$$\underbrace{2^n}_{\text{posibilidades para la diagonal}} \cdot \underbrace{2^{\frac{n^2-n}{2}}}_{\text{posibilidades para el triangulo superior}}$$

$$2^{n+\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{2n+n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$ relaciones simétricas

* cantidad de relaciones antisimétricas en A

xRy y $yRx \Rightarrow x = y$

$x \neq y$ y $xRy \Rightarrow y \not{R} x$

$M =$ 

posibilidades para m_{ij} y m_{ji}:

1. $m_{ij} = 1$, $m_{ji} = 0$
2. $m_{ij} = 0$, $m_{ji} = 0$
3. $m_{ij} = 0$, $m_{ji} = 1$

para cada una de las n entradas de la diagonal hay 2 posibilidades.

Por la regla del producto:

$$\underbrace{2^n}_{\text{posibilidades para la diagonal}} \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$$ relaciones antisimétricas

Relaciones de equivalencia

A un conjunto

Decimos que una relación R sobre A es una relación de equivalencia si es:

* reflexiva: xRx para todo $x \in A$
* simétrica: $xRy \Rightarrow yRx$
* transitiva: xRy y $yRz \Rightarrow xRz$

$a \in A$

la clase de equivalencia de a es:

$\bar{a} = [a] = \{b \in A : aRb\}$ como R es reflexiva: $a \in [a]$

el conjunto cociente

$A/_R = \{[a] : a \in A\}$

ejemplo:

$a, b \in \mathbb{Z}$

aRb si a y b tienen el mismo resto al dividir entre 3

R relación de equivalencia:

* reflexiva: $a \in \mathbb{Z}$

  a y a tienen el mismo resto al dividir entre 3 $\Rightarrow aRa$
* simétrica: $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que aRb

  $aRb \Rightarrow a$ y b tienen el mismo resto

  $\Rightarrow b$ y a tienen el mismo resto

  $\Rightarrow bRa$
* transitiva: $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que aRb, bRc

  $\left.\begin{array}{l} aRb \Rightarrow a \text{ y } b \text{ tienen el mismo resto} \\ bRc \Rightarrow b \text{ y } c \text{ tiene el mismo resto} \end{array}\right\} \Rightarrow a$ y c tienen el mismo resto

  $\Rightarrow aRc$ ✓

clases de equivalencia:

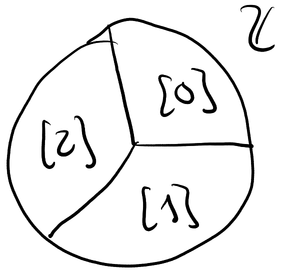
$a \in \mathbb{Z}$ $\quad aRb$ si a y b tienen el mismo resto al dividir entre 3

$[a] = \{ b \in \mathbb{Z} : aRb \}$

$[3] = [0] = \{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\} = \{ b \in \mathbb{Z} : bR0 \} = \{ b \in \mathbb{Z} : 3n$ para algún $n \}$

$[31] = [1] = \{1, 4, -2, \ldots\} = \{ b \in \mathbb{Z} : bR1 \} = \{ b \in \mathbb{Z} : 3n+1$ para algún $n \}$

$[-1] = [5] = [2] = \{2, 5, -1, \ldots\} = \{ b \in \mathbb{Z} : bR2 \} = \{ b \in \mathbb{Z} : 3n+2$ para algún $n \}$



$-1 = 3(-1) + 2$

$-3 = 3(-1) + 0$

$-2 = 3(-1) + 1$

$[1] = \{ b \in \mathbb{Z} : bR1 \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} :$ b y 1 tienen el mismo resto al dividir entre $3 \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} :$ b tiene resto igual a 1 al dividir entre $3 \}$

$= \{ b \in \mathbb{Z} : b = 3n+1$ para algún $n \in \mathbb{Z} \}$

conjunto cociente:

$\mathbb{Z}/R = \{ [0], [1], [2] \}$

$= \{ \{ b \in \mathbb{Z} : b = 3n \}, \{ b \in \mathbb{Z} : b = 3n+1 \}, \{ b \in \mathbb{Z} : b = 3n+2 \}$

Ejercicio 5

En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

* R es una relación de equivalencia

① reflexiva: sea $a \in \mathbb{Z}$

$a^2 = a^2 \Rightarrow aRa$ ✓

② simétrica: sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que aRb

$aRb \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow bRa$ ✓

③ transitiva: sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que aRb y bRc

$$\left.\begin{aligned} aRb &\Rightarrow a^2 = b^2 \\ bRc &\Rightarrow b^2 = c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow aRc \checkmark$$

* clases de equivalencia

$$[0] = \{b \in \mathbb{Z} : bR0\}$$
$$= \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = 0^2\}$$
$$= \{0\}$$

$[0] = \{0\}$

$$[1] = \{b \in \mathbb{Z} : bR1\}$$
$$= \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = 1^2\}$$
$$= \{1, -1\}$$

$[1] = \{1, -1\} = [-1]$

$$[2] = \{b \in \mathbb{Z} : bR2\}$$
$$= \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = 2^2 = 4\}$$
$$= \{2, -2\}$$

$$[n] = \{b \in \mathbb{Z} : bRn\}$$
$$= \{b \in \mathbb{Z} : b^2 = n^2\}$$
$$= \{n, -n\}$$

$[n] = \{n, -n\}$

* conjunto cociente

$$\mathbb{Z}/R = \{[0], [1], [2], \dots\}$$
$$= \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots\}$$