Relaciones

Sea A un conjunto.

una relación en A es un subconjunto R de $A\times A = \{(x,y) : x\in A,\ y\in A\}$

decimos que a está relacionado con b si $(a,b)\in R$

aRb

ejemplo: $A=\{1,2,3,4\}$

$aRb \iff a\leq b$

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$1\leq 1 \rightsquigarrow 1R1$ $\qquad$ $2\leq 2 \rightsquigarrow 2R2$

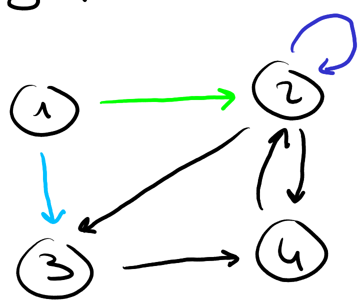
$1\leq 2 \rightsquigarrow 1R2$ $\qquad$ $2\leq 4 \rightsquigarrow 2R4$

Formas de representar una relación en $A=\{1,2,3,4\}$

1) dar los pares del conjunto R

$R=\{\underbrace{(1,2)}_{1R2},\underbrace{(1,3)}_{1R3},\underbrace{(2,2)}_{2R2},(2,4),(2,3),(3,4),(4,2)\}$

2) dar un grafo dirigido



3) dar la matriz de la relación

$M=(m_{ij})$ $\qquad$ $m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } iRj\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$m_{11}=0$ porque $1 \not R 1$

$m_{12}=1$ porque $1R2$

$m_{13}=1$ porque $1R3$

$m_{14}=0$ porque $1 \not R 4$

Decimos que una relación R en un conjunto A es:

* reflexiva si xRx para todo $x \in A$
* irreflexiva si $x \not R x$ para todo $x \in A$
* simétrica si $xRy \Rightarrow yRx$ $\quad x, y \in A$
* antisimétrica si xRy y $yRx \Rightarrow x = y$

$(x \leq y, \ y \leq x \Rightarrow x = y)$

$x \neq y$ y $xRy \Rightarrow y \not R x$

relación simétrica y antisimétrica?

$R = \{(1,1), (2,2), (4,4)\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1R1 \text{ y } 1R1 \checkmark \\ 2R2 \text{ y } 2R2 \checkmark \\ 4R4 \text{ y } 4R4 \checkmark \end{array}\right\} \text{simétrica}$$

$$xRy \text{ y } yRx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 2 \\ x = y = 4 \end{array}\right.$$

xRy y $yRx \Rightarrow x = y$ ✓ antisimétrica

* asimétrica si $xRy \Rightarrow y \not R x$
  $\Rightarrow$ entonces no puede ser reflexiva
* transitiva: si xRy y $yRz \Rightarrow xRz$
  $(x \leq y, \ y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

Ejercicio 1
Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.

(b) $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

b) $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

* reflexiva?
  $1 \not R 1$ entonces no es reflexiva
* irreflexiva?
  $1 \not R 1, \ 2 \not R 2, \ 3 \not R 3, \ 4 \not R 4$
  entonces es irreflexiva
* simétrica?

$1R2$ pero $2 \not R 1$

entonces no es simétrica

* antisimétrica?

  $1R2$ y $2 \not R 1$ ✓
  $1R3$ y $3 \not R 1$ ✓
  $1R4$ y $4 \not R 1$ ✓
  $2R3$ y $3 \not R 2$ ✓
  $2R4$ y $4 \not R 2$ ✓
  $3R4$ y $4 \not R 3$ ✓

  es antisimétrica

* asimétrica? ✓
* transitiva?

  $1R2$, $2R3$ y $1R3$ ✓
  $1R2$, $2R4$ y $1R4$ ✓
  $2R3$, $3R4$ y $2R4$ ✓
  $1R3$, $3R4$ y $1R4$ ✓

  es transitiva

(f) Las relaciones cuyas matrices son

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* reflexiva?

  $m_{11} = 0 \Rightarrow 1 \not R 1 \Rightarrow$ no es reflexiva

  para que R sea reflexiva, la matriz tiene que tener unos en la diagonal

* irreflexiva?

  $m_{11} = 0 \Rightarrow 1 \not R 1$
  $m_{22} = 0 \Rightarrow 2 \not R 2$
  $m_{33} = 0 \Rightarrow 3 \not R 3$
  $m_{44} = 0 \Rightarrow 4 \not R 4$

  es irreflexiva

  para que R sea irreflexiva, la matriz tiene que tener ceros en la diagonal

* simétrica?

  $m_{12} = 1 \Rightarrow 1R2$ ✓
  $m_{21} = 1 \Rightarrow 2R1$

  $m_{23} = 1 \Rightarrow 2R3$ ✓
  $m_{32} = 1 \Rightarrow 3R2$

  $m_{24} = 1 \Rightarrow 2R4$ ✓
  $m_{42} = 1 \Rightarrow 4R2$

  es simétrica

  $m_{14} = 1 \Rightarrow 1R4$ ✓
  $m_{41} = 1 = 4R1$

R es simétrica $\iff$ la matriz es simétrica

$iRj \Rightarrow jRi$ $\qquad m_{ij} = m_{ji}$

* antisimétrica?

$m_{12} = 1 \Rightarrow 1R2$

$m_{21} = 1 \Rightarrow 2R1$

$1R2$ y $2R1$ pero $1 \neq 2$ no es antisimétrica.

$(xRy$ y $yRx \Rightarrow x = y)$

* asimétrica? $(xRy \Rightarrow y \not R x)$

$1R2$ pero $2R1$ entonces no es asimétrica

* transitiva? $(xRy$ y $yRz \Rightarrow xRz)$

$\underset{m_{21}=1}{2R1}$ y $\underset{m_{12}=1}{1R2}$ pero $\underset{m_{22}=0}{2 \not R 2}$

entonces R no es transitiva.

Ejercicio 2

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

$A = \{a,b,c,d\}$

relaciones R en A tales que : R simétrica

$(a,b) \in R$

$(c,c) \in R$

$(a,b) \in R \underset{R \text{ simétrica}}{\Rightarrow} (b,a) \in R$

$\{(a,b),(b,a),(c,c)\} \subset R$

a, c $\to$ $\{(a,c),(c,a)\} \subset R$

a, c $\to$ $(a,c) \notin R$, $(c,a) \notin R$

Tenemos que elegir si agregamos los siguientes conjuntos a R:

$\{(a,c),(c,a)\} \to 2$ posibilidades: lo agregamos o no a R

$\{(b,c),(c,b)\}$

$\{(a,d),(d,a)\}$

$\{(a,a)\}$

$\{(b,b)\}$

$\{(d,d)\}$

$\{(b,d),(d,b)\}$

$\{(c,d),(d,c)\}$

por la regla del producto: 2^8 relaciones