Primer parcial 2023

Ejercicio de Desarrollo

Probar que si $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ para todo $n \geq 1$, entonces $a_n \geq 3^n$ para todo $n \geq 1$.

Importante: indicar claramente el método de demostración empleado y justificar detalladamente cada paso de la demostración.

Sea $P(n): a_n \geq 3^n$

Vamos a probar que $P(n)$ vale para todo $n \geq 1$ por inducción fuerte.

Paso base:

$a_1 = 3 \geq 3^1$ ✓

$a_2 = 10 \geq 3^2$ ✓

$a_3 = 30 \geq 3^3$ ✓

Paso inductivo

Hipótesis inductiva: Suponemos que valen $P(n)$, $P(n+1)$ y $P(n+2)$

$P(n): a_n \geq 3^n$

$P(n+1): a_{n+1} \geq 3^{n+1}$

$P(n+2): a_{n+2} \geq 3^{n+2}$

Tesis inductiva: Vale $P(n+3)$

$P(n+3): a_{n+3} \geq 3^{n+3}$

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \underset{\text{por hipótesis inductiva}}{\geq} 2\cdot\overbrace{3^{n+2}}^{3^n\cdot 3^2} + 7\cdot\overbrace{3^{n+1}}^{3^n\cdot 3} + 3^n = 3^n(2\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 1)$$

$$= 3^n \cdot 40$$

$$\geq 3^n \cdot 27$$

$$= 3^{n+3}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_{n+3} \geq 3^{n+3} = 3^n\cdot 3^3 = 3^n\cdot 27 \\ a_{n+3} \geq 3^n\cdot 40 \end{array}\right]$$

entonces $a_{n+3} \geq 3^{n+3}$

Entonces, dado que $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ es un conjunto bien ordenado, probamos por inducción fuerte que $a_n \geq 3^n$ $\forall\, n \geq 1$.

Múltiple Opción 4

Se dispone de n de golosinas <u>diferentes</u> ($n \geq 1$) y una cantidad m no menor ($m \geq n$) de bolsas <u>idénticas</u>. ¿Cuál de estas expresiones corresponde a la cantidad de formas posibles de embolsar las golosinas? A) $\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$; B) $\sum_{k=1}^{n} Sob(n,k)$; C) $\sum_{k=1}^{n} C_n^{n+k-1}$; D) $\sum_{k=1}^{n} C_k^{n+k-1}$.

n golosinas <u>diferentes</u>

m bolsas <u>identicas</u> $m \geq n$

$k=1 \quad C_n^{n} \quad CR_n^k$

$k=2 \quad C_n^{n+1}$

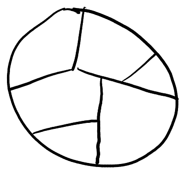
$CR_k^n \quad * * \mid * \mid * *$

1ra 2da 3er

cantidad de formas de embolsar las golosinas?

$S(n,k)$

$A = \{1, \dots, n\}$



cantidad de formas de dividir los elementos de A en k paquetes

$Sob(n,k)$

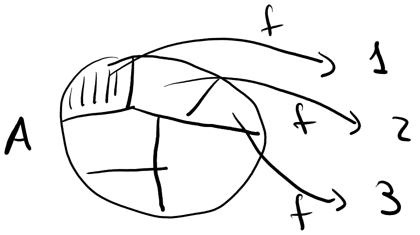
$f: \underbrace{\{1, \dots, n\}}_{A=} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$

$f^{-1}(1) = \{ \dots \}$

$f^{-1}(2) = \{ \dots \}$

$\vdots$

$f^{-1}(k) = \{ \dots \}$



<u>CASO 1</u>: usamos 1 bolsa

$\Rightarrow 1 = S(n,1)$ formas

<u>CASO 2</u>: usamos 2 bolsas

$\Rightarrow S(n,2)$ formas

<u>CASO 3</u>: usamos 3 bolsas

$\Rightarrow S(n,3)$ formas

$\vdots$

<u>CASO k</u>: usamos k bolsas

$\Rightarrow S(n,k)$ formas

$\vdots$

<u>CASO n</u>: usamos n bolsas

$\Rightarrow S(n,n)$ formas

Por la regla de la suma, la cantidad de formas de embolsar los caramelos

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de palabras usando todas las letras de la palabra CARACOL, que no tenga letras iguales consecutivas. Opciones: A) 650; B) 660; C) 670; D) 680.

CARACOL

$S = \{$permutaciones de CARACOL$\}$

c_1 = permutación con dos C consecutivas

c_2 = permutación con dos A consecutivas

$$|S| = \frac{7!}{2!\,2!}$$

$$N(c_1) = \frac{6!}{2!}$$

una sola letra

permutaciones de $\boxed{CC}$ARAOL

C$\boxed{CC}$ARAOL

$\boxed{CC}$CARAOL

$$N(c_2) = \frac{6!}{2!}$$

una sola letra

permutaciones de C$\boxed{AA}$RCOL

$$N(c_1c_2) = 5!$$

una sola letra

permutaciones de $\boxed{CC}\,\boxed{AA}$ ROL

una sola letra

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2) = |S| - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1c_2)$$

$$= \frac{7!}{2!\,2!} - \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{2!} + 5!$$

$$= \frac{7!}{2!\,2!} - \cancel{2}\,\frac{6!}{\cancel{2!}} + 5!$$

$$= 660$$

Múltiple Opción 6

El coeficiente en x^4yz de la función $(x - x^3 + y - z + 1)^6$ es: A) 330; B) 340; C) 350; D) 360.

$\underbrace{x^4yz}$ en $(x-x^3+y-z+1)^6$

$(x-x^3+y-z+1)(x-x^3+y-z+1)\cdots(x-x^3+y-z+1)$

$y \qquad z$

① elegimos x cuatro veces, y una vez, $(-z)$ una vez

$$\frac{6!}{4!0!1!1!0!}(x)^4(-x^3)^0(y)^1(-z)^1(1)^0$$

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 30$$

$$30(x)^4(-x^3)^0(y)^1(-z)^1(1)^0$$

② elegimos x una vez, $-x^3$ una vez, y una vez, $-z$ una vez y 1 dos veces

$$\frac{6!}{1!1!1!1!2!}(x)^1(-x^3)^1(y)^1(-z)^1(1)^2$$

$$\frac{6!}{2!} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = \underbrace{30\cdot 4}_{120}\cdot 3 = 360$$

$$360(x)^1(-x^3)^1(y)^1(-z)^1(1)^2$$

entonces en el desarrollo de $(x-x^3+y-z+1)^6$ aparece

$$30\underbrace{(x)^4(-x^3)^0(y)^1(-z)^1(1)^0}_{-x^4yz} + 360\underbrace{(x)^1(-x^3)^1(y)^1(-z)^1(1)^2}_{x^4yz}$$

$$= -30x^4yz + 360x^4yz$$

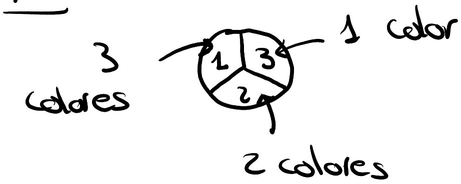
$$= \underbrace{330}x^4yz$$

coeficiente de x^4yz

1. La *ruleta tricolor* tiene n casilleros en círculo ($n \geq 3$), numerados desde 1 hasta n, cada uno de ellos pintados de color rojo, azul o blanco. Definimos a_n como la cantidad de formas de pintar la ruleta de n casilleros, de forma que no haya dos casilleros contiguos del mismo color. El valor de a_{50} es:

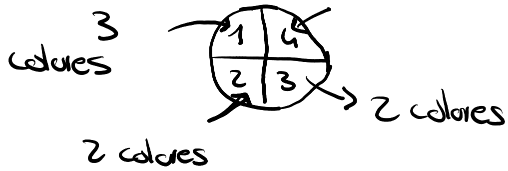
a_n = cantidad de formas de pinter la ruleta de n casilleros sin que haya dos casilleros contiguos del mismo color

<u>$n = 3$</u>:

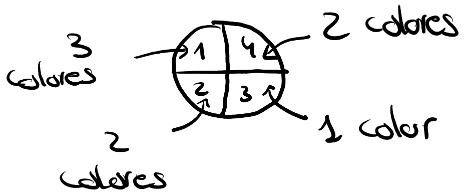


$a_3 = 3 \cdot 2 = 6$

<u>$n = 4$</u>

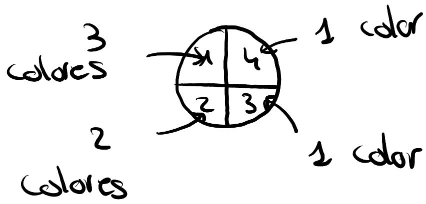


<u>CASO 1</u>: 1 y 3 son del mismo color



$3 \cdot 2 \cdot 2$ formas

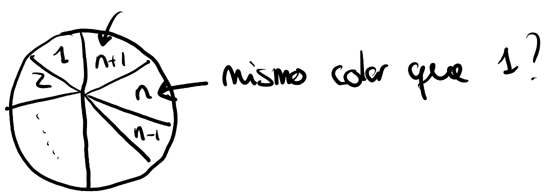
<u>CASO 2</u>: 1 y 3 son de colores distintos



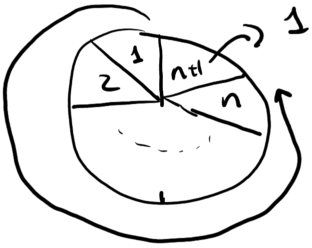
$3 \cdot 2$ formas

por la regla de la suma: $a_4 = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 18$

$a_{n+1} = ?$

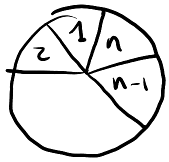


CASO 1: 1 y n son de color distinto



1 colores

si sacamos el casillero n+1



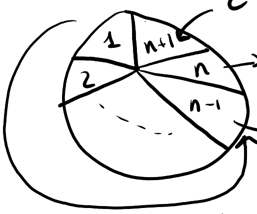
ruleta con n casilleros tal que no hay dos casilleros contiguos del mismo color

→ hay a_n formas de pintar los primeros n casilleros

total del caso 1: a_n

CASO 2: 1 y n son del mismo color

2 colores

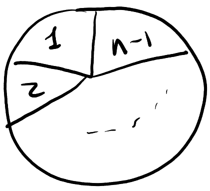


mismo color que 1

no es del mismo color que

a_{n-1} formas

si sacamos los casilleros n+1 y n



ruleta con n-1 casilleros tales que no hay dos contiguos del mismo color

entonces hay a_{n-1} formas de pintar los primeros n-1 casilleros

total del caso 2: $2a_{n-1}$

Por la regla de la suma:

$$a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_n$$

$$a_3 = 6$$

$$a_4 = 18$$

$$a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1} = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

raices: 2 y -1

$$a_n = \lambda^n \rightsquigarrow \begin{cases} a_{n+1} = \lambda^{n+1} \\ a_{n-1} = \lambda^{n-1} \end{cases}$$

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n - 2\lambda^{n-1} = 0$$

$$\cancel{\lambda^{n-1}} \cdot \lambda^2 - \cancel{\lambda^{n-1}} \cdot \lambda - 2\cancel{\lambda^{n-1}} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$a_3 = 6 \rightsquigarrow \alpha_1 2^3 + \alpha_2 (-1)^3 = 6 \longrightarrow 8\alpha_1 - \alpha_2 = 6$$

$$a_4 = 18 \rightsquigarrow \alpha_1 2^4 + \alpha_2 (-1)^4 = 18 \longrightarrow 16\alpha_1 + \alpha_2 = 18$$

$$24\alpha_1 = 24 \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$a_n = 2^n + 2(-1)^n$$

$$a_{50} = 2^{50} + 2$$

$$C_2 a_{n+2} + C_1 a_{n+1} - C_0 a_n = r^n \underbrace{g(n)}_{\text{polinomio}}$$

① si r no es raiz de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

② si r es raiz simple de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = n r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

③ si r es raiz doble de $p(\lambda)$

$a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$ donde h es un polinomio del mismo grado que g

Ejercicio MO1:

¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{a, b, \underbrace{c, d, e, f, g}\}$ contienen la a y/o la b?

A) 32

B) 95

C) 96

D) 128

C_1 = subconjunto que contiene a a

C_2 = subconjunto que contiene a b

$N(C_1C_2) + N(C_1\overline{C_2}) + N(\overline{C_1}C_2)$

a y b — a pertenece, b no pertenece — a no pertenece, b pertenece

CASO 1 subconjuntos que contienen a a y b

$\{a, b, c, d, e, f, g\}$

✓ ✓ 2 pos. 2 pos 2 pos 2 pos 2 pos

$2^5 = 32$

CASO 2 : subconjuntos que contienen a a y no contienen a b

$\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 2^5 subconjuntos

✓ X 2 pos 2 pos 2 2 2

CASO 3 : subconjuntos que contienen a b y no contienen a a

$\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 2^5 subconjuntos

X ✓ 2 2 2 2 2

Regla de la suma: $2^5 + 2^5 + 2^5 = 96$ subconjuntos

PBO

Todo subconjunto no vacío en $\mathbb{N}$ tiene mínimo

$P(n)$: PBO $\Rightarrow$ PIC

Dem

Consideremos una propiedad $P(n)$ sobre $\mathbb{N}$ cualquiera sobre $n \in \mathbb{N}$ que cumple $P(0)$ y PI

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / P(n) \text{ es falso}\} \Rightarrow$ es suficiente probar que $S = \emptyset$

Supongamos que $S \neq \emptyset$, como S es un subconjunto en los naturales $(S \subseteq \mathbb{N})$

$\Rightarrow \exists m \in S / m \leq x, \forall x \in S$. Como P cumple el paso base $\Rightarrow m \neq 0$

Como $m \in S$ y $S \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow m \in \mathbb{N}, m \geq 1$

Por def de m: $(m-1) \in \mathbb{N}$ y $P(m-1)$ es verdadera $\Rightarrow$ Por paso ind, $P(m)$ es verdadera

Como $m \in S$, $P(m)$ es falsa ↯

$\Rightarrow S = \emptyset$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vale ∎

Múltiple Opción 5

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ que cumplen las siguientes restricciones $-2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 6$, $x_3 \geq 5$.

Sugerencia: aplicar cambios de variables adecuados para que todas las variables sean enteras y no negativas.

(A) 41;
(B) 51;
(C) 61;
(D) 71;
(E) 81.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \qquad \begin{cases} -2 \leq x_1 \leq 6 \\ -2 \leq x_2 \leq 6 \\ 5 \leq x_3 \end{cases}$$

$-2 \leq x_1 \leq 6 \leadsto 0 \leq \underbrace{x_1 + 2} \leq 8$

$y_1 = x_1 + 2 \longrightarrow 0 \leq y_1 \leq 8$

$x_1 = y_1 - 2$

$-2 \leq x_2 \leq 6 \leadsto 0 \leq x_2 + 2 \leq 8$

$y_2 = x_2 + 2 \longrightarrow 0 \leq y_2 \leq 8$

$x_2 = y_2 - 2$

$5 \leq x_3 \leadsto 0 \leq x_3 - 5$

$y_3 = x_3 - 5 \longrightarrow 0 \leq y_3$

$x_3 = y_3 + 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = 17$

$y_1 - 2 + y_2 - 2 + y_3 + 5 = 17$

$$\boxed{y_1 + y_2 + y_3 = 16 \qquad \begin{array}{l} 0 \leq y_1 \leq 8 \\ 0 \leq y_2 \leq 8 \\ 0 \leq y_3 \end{array}}$$

$S = \{$ soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 = 16$ con $0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \}$

$c_1 =$ soluciones con $y_1 \geq 9$

$c_2 =$ soluciones con $y_2 \geq 9$

$|S| = CR_{16}^3$

$N(c_1) = CR_7^3$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \qquad \begin{array}{l} y_1 \geq 9 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

tiene la misma cantidad de soluciones que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7 \qquad y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0$$

$N(c_2) = CR_7^3$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 9 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

$N(c_1 c_2) = 0$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 9 \\ y_2 \geq 9 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2) = |S| - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2) = CR_{16}^3 - CR_7^3 - CR_7^3$

$$CR_{16}^{3} - 2CR_{7}^{3} = C_{16}^{3+16-1} - 2C_{7}^{3+7-1}$$

$$= C_{16}^{18} - 2C_{7}^{9}$$

$$= \frac{18!}{16!\,2!} - \cancel{2}\frac{9!}{7!\,\cancel{2!}}$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}\,2} - \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}}$$

$$= \frac{9 \cdot \cancel{2} \cdot 17}{\cancel{2}} - 9 \cdot 8$$

$$= 9 \cdot 17 - 9 \cdot 8$$

$$= 9(17-8)$$

$$= 81$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 21 \quad \text{con} \quad 0 \leq y_1 \leq 8$$
$$0 \leq y_2 \leq 8$$
$$5 \leq y_3$$

$$|S| = CR_{16}^{3}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 21 \quad \text{con} \quad 0 \leq y_1 \leq 8$$
$$0 \leq y_2 \leq 8$$
$$5 \leq y_3$$

tiene la misma cantidad de soluciones que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16 \quad \text{con} \quad 0 \leq y_1,\ 0 \leq y_2,\ 0 \leq y_3$$